

# ALGEBRA II

PROF.SSA PATRIZIA LONGOBARDI

A.A. 2003/2004

VI APPELLO – 17 NOVEMBRE 2004

**Esercizio 1.** Sia  $F$  un campo e si consideri l'insieme  $F^2$  strutturato ad anello e a  $F$ -spazio vettoriale nel modo usuale. Si provi che l'applicazione

$$\Psi : (a, b) \in F^2 \rightarrow 2a + 3b \in F$$

è un  $F$ -epimorfismo e che il sottospazio  $D = \{(c, c) | c \in F\}$  è un supplementare di  $\ker \Psi$  se e solo se  $\text{car} F \neq 5$ . Si dimostri poi che  $\Psi$  è un omomorfismo di anelli e solo se  $\text{car} F = 2$ .

**Esercizio 2.** Si consideri il polinomio

$$f(x) = 5x^6 + 6x^5 + 15x^3 + 3x + 1 \in Z_p[x],$$

con  $p$  primo. In ciascuno dei seguenti casi:  $p = 2$ ,  $p = 3$ ,  $p = 5$ , si determinino un campo di spezzamento  $K$  di  $f(x)$  su  $Z_p$ , il grado  $[K : Z_p]$ , l'ordine, la struttura e gli elementi di un gruppo di Galois  $G$  di  $f(x)$  su  $Z_p$ , il reticolo dei sottocampi di  $K$ .