ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2004/2005

VI appello – 7 dicembre 2005

Esercizio 1. Sia B un campo e si consideri l'usuale B-spazio vettoriale

$$B^3 = \{(a, b, c)|a, b, c \in B\}.$$

– Con $\tau \in B$ Si verifichi che l'applicazione

$$\psi_\tau : (a, b, c) \in B^3 \to (a + 3c, 4b + 2c, a + \tau b) \in B^3$$

è un B-endomorfismo dello spazio vettoriale B^3.

– Si determini il valore di τ per cui ψ_τ è non iniettivo qualunque sia la caratteristica di B.

– Supposto $carB = 3$, si determini il valore di τ per cui ψ_τ è non iniettivo.

– Supposto $carB = 5$, si determini il valore di τ per cui ψ_τ è non iniettivo.

– Si determini il valore di $carB$ per cui ψ_τ è non iniettivo qualunque sia τ.

– Posti poi $\tau = 1$ e $\phi = \psi_1$ si determinino, in funzione della caratteristica di B, il nucleo $Ker\phi$ e l'immagine $Im\phi$ di ϕ, precisandone la dimensione ed una base.

– Si verifichi che, qualunque sia la caratteristica di B, il sottospazio $W = \langle(2, 1, 0), (0, 4, 1), (6, 0, 1)\rangle$ è un supplementare di $ker\phi$.

– Nell'ipotesi $carB = 2$, si verifichi che la posizione $\varphi((a, b, c) + ker\phi) = a - c$ definisce un'applicazione φ di $B^3/ker\phi$ in B e che tale applicazione è un epimorfismo di B-spazi vettoriali.

Esercizio 2. Sia p un primo e si consideri il polinomio

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 30x + 2 \in Z_p[x].$$

Distinguendo i casi casi:

$$p = 2,\ \ p = 3,\ \ p = 5,\ \ p = 7$$

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $Z_p[x]$;

(II) posto $J = (f(x))$, dell'anello $Z_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti;

(III) si determini un campo di spezzamento E di $f(x)$ rispetto a Z_p, precisandone l'ordine, il grado $|E : Z_p|$ ed una Z_p–base.