ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2005/2006

VI appello – 15 novembre 2006

Esercizio 1. Siano F un campo e si consideri l'usuale F-spazio vettoriale $F^3 = \{(a, b, c)|a, b, c \in F\}$.

(i) Si verifichi che l'applicazione $\varphi : (a, b, c) \in F^3 \to (2a+4c, 6b+7c, 2a+8b+9c) \in F^3$ è un F-endomorfismo dello spazio vettoriale F^3.

– Si determinino, in funzione della caratteristica di F, il nucleo $Ker\varphi$ e l'immagine $Imm\varphi$ di φ, precisandone la dimensione ed una base, ed esibendo di ciascuno un supplementare.

(ii) Considerato il sottospazio $W = \langle(1, 0, 1)\rangle$ di F^3, si descrivano i suoi elementi e si provi che la posizione $\Phi((a, b, c) + W) = (a - c, b)$ definisce un'applicazione Φ di F^3/W in F^2, che tale applicazione è un isomorfismo di F-spazi vettoriali, e di essa si determini l'inversa.

Esercizio 2. Sia B un campo e si consideri il polinomio

$$f(x) = 10x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 110x + 7 \in B[x].$$

Supposto $B = \mathbb{Z}_p$ e distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,

– si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

– posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti;

– si determini un campo di spezzamento E di $f(x)$ rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e una $\mathbb{Z}_p$-base.