

ALGEBRA II

PROF.SSA PATRIZIA LONGOBARDI

A.A. 2003/2004

VII APPELLO – 13 DICEMBRE 2004

Esercizio 1. Sia F un campo e si consideri l'insieme F^2 strutturato ad anello e a F -spazio vettoriale nel modo usuale. Si consideri l'applicazione

$$\Psi : (a, b) \in F^2 \rightarrow 10a^3 + 3b \in F.$$

Si dimostri che Ψ è un omomorfismo di anelli se e solo se $\text{car}F = 2$ o $\text{car}F = 5$ o $|F| = 3$. Si studi poi quando Ψ è suriettiva, e si verifichi che Ψ non è mai iniettiva.

Esercizio 2. Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^5 + 10x^4 + 15x^3 + 6x^2 + 3 \in Z_p[x],$$

con p primo. In ciascuno dei seguenti casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, si determinino un campo di spezzamento K di $f(x)$ su Z_p , il grado $[K : Z_p]$, l'ordine, la struttura e gli elementi di un gruppo di Galois G di $f(x)$ su Z_p , il reticolo dei sottocampi di K .