

# ALGEBRA II

PROF.SSA PATRIZIA LONGOBARDI

A.A. 2003/2004

VII APPELLO – 13 DICEMBRE 2004

**Esercizio 1.** Sia  $F$  un campo e si consideri l'insieme  $F^2$  strutturato ad anello e a  $F$ -spazio vettoriale nel modo usuale. Si consideri l'applicazione

$$\Psi : (a, b) \in F^2 \rightarrow 10a^3 + 3b \in F.$$

Si dimostri che  $\Psi$  è un omomorfismo di anelli se e solo se  $\text{car}F = 2$  o  $\text{car}F = 5$  o  $|F| = 3$ . Si studi poi quando  $\Psi$  è suriettiva, e si verifichi che  $\Psi$  non è mai iniettiva.

**Esercizio 2.** Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^5 + 10x^4 + 15x^3 + 6x^2 + 3 \in Z_p[x],$$

con  $p$  primo. In ciascuno dei seguenti casi:  $p = 2$ ,  $p = 3$ ,  $p = 5$ , si determinino un campo di spezzamento  $K$  di  $f(x)$  su  $Z_p$ , il grado  $[K : Z_p]$ , l'ordine, la struttura e gli elementi di un gruppo di Galois  $G$  di  $f(x)$  su  $Z_p$ , il reticolo dei sottocampi di  $K$ .