

Programma del corso di
ISTITUZIONI DI ALGEBRA SUPERIORE - I modulo
ALGEBRA II
tenuto dalla Prof. Patrizia LONGOBARDI
nell'anno accademico 2001–2002

Richiami

Strutture algebriche, strutture quoziente, omomorfismi tra strutture. Gruppi. Gruppi ciclici. Elementi periodici e elementi aperiodici di un gruppo. Anelli. Caratteristica di un anello unitario. Campo dei quozienti di un dominio di integrità. Anelli fattoriali, principali, euclidei. Polinomi in una indeterminata a coefficienti in un anello unitario, proprietà universale. Polinomi irriducibili. Spazi vettoriali.

Gruppi

Derivato di un gruppo, sua caratterizzazione e sue proprietà elementari. Derivato n -esimo di un gruppo.

Serie di sottogruppi. Serie derivata. Serie di composizione e fattori di composizione di un gruppo.

Gruppi risolubili: definizione, esempi, proprietà elementari. Gruppi semplici risolubili. Caratterizzazioni dei gruppi risolubili in termini di serie derivata e, nel caso finito, in termini di serie di composizione.

Gruppi simmetrici. Gruppi alterni. Semplicità del gruppo alterno A_n e non risolubilità del gruppo simmetrico S_n , per $n \geq 5$.

Polinomi

Polinomi primitivi, loro proprietà. Lemma di Gauss. Criterio di Eisenstein. Polinomio derivato, sue proprietà elementari. Radici di un polinomio, radici semplici, radici multiple. Fattorialità dell'anello $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$, con A anello fattoriale.

Teoria dei campi

Estensioni di un campo. Elementi algebrici, elementi trascendenti. Polinomio minimo di un elemento algebrico. Dipendenza lineare in un campo, grado di un campo rispetto ad un suo sottocampo, teorema di moltiplicazione dei gradi. Estensioni semplici, algebriche, di grado finito. Estensione simbolica algebrica, estensione simbolica trascendente, primo teorema di prolungamento. Chiusura algebrica di un sottocampo in un campo, teorema di Cantor. Campo di spezzamento di un polinomio, secondo teorema di prolungamento, isomorfismi tra campi di spezzamento di un polinomio, limitazione del numero degli automorfismi di un campo di spezzamento di un polinomio sul relativo sottocampo. Campi algebricamente chiusi, chiusura algebrica di un campo. Caratterizzazione dei polinomi aventi tutte le radici semplici. Polinomi separabili, estensioni separabili, polinomi separabili a coefficienti in un campo di caratteristica p . Endomorfismo di Frobenius di un campo di caratteristica p . Campi perfetti, loro caratterizzazione. Un esempio di campo non perfetto e di un polinomio irriducibile non separabile. Estensioni normali. Estensioni normali e separabili. Esempi.

Teoria di Galois

Gruppo di Galois di un'estensione, esempi. Sottocampo A^G degli invarianti di un gruppo G di automorfismi di un campo A , proprietà elementari. Legame tra $|G|$ e $[A : A^G]$ con A campo e G gruppo finito di automorfismi di A .

Estensioni di Galois, estensioni di Galois di grado finito, loro caratterizzazioni. Teorema fondamentale della teoria di Galois. Esempi.

Polinomi simmetrici su un anello, polinomi simmetrici elementari. Espressioni razionali simmetriche su un campo B ; gruppo di Galois di $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sul sottocampo generato da B e dai polinomi simmetrici elementari.

Sottogruppi finiti del gruppo moltiplicativo di un campo. Radici n -esime dell'unità, radici primitive.

Chiusura normale di un'estensione finita, sue proprietà se l'estensione separabile.

Gruppo di Galois di un polinomio, proprietà elementari. Criterio di irriducibilità per polinomi privi di radici multiple. Estensioni ciclotomiche in caratteristica 0. Studio di alcune estensioni cicliche. Torre radicale di un'estensione. Equazioni risolubili per radicali. Caratterizzazione, in campi di caratteristica 0, delle equazioni risolubili per radicali. Polinomio generale di grado n , gruppo di Galois del polinomio generale. Teorema di Ruffini-Abel.

Campi finiti, loro proprietà.

Teorema di Artin-Steinitz e teorema dell'elemento primitivo.

Cenni sui polinomi ciclotomici, sul teorema fondamentale dell'algebra e sul teorema di Wedderburn.

Testi consigliati

M. Curzio, P. Longobardi, M. Maj, *Lezioni di algebra*, Liguori, 1994 (II ed. 1996).

T. W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

N. Jacobson, *Basic Algebra* I, II, Freeman, San Francisco, 1980.

I. Stewart, *Galois Theory*, Chapman and Hall, London, 1973.

e inoltre

M. Curzio, P. Longobardi, M. Maj, *Esercizi di Algebra - Una raccolta di prove di esame svolte*, Liguori, Napoli, 1995.