

**Programma del corso di  
ALGEBRA II  
ISTITUZIONI DI ALGEBRA SUPERIORE - I modulo  
tenuto dalla Prof. Patrizia LONGOBARDI  
nell'anno accademico 2002–2003**

### **Richiami**

Strutture algebriche, strutture quoziente, omomorfismi tra strutture. Gruppi. Gruppi ciclici. Elementi periodici e elementi aperiodici di un gruppo. Anelli. Caratteristica di un anello unitario. Campo dei quozienti di un dominio di integrità. Anelli fattoriali, principali, euclidei. Polinomi in una indeterminata a coefficienti in un anello unitario.

### **Polinomi**

Proprietà universale. Polinomi irriducibili. Polinomi primitivi, loro proprietà. Lemma di Gauss. Criterio di Eisenstein. Derivazioni. Polinomio derivato, sue proprietà elementari. Formula di Taylor. Radici di un polinomio, radici semplici, radici multiple. Polinomio fondamentale su un campo finito. Polinomi irriducibili a coefficienti razionali, reali, complessi. Esempi.

Polinomi in più indeterminate a coefficienti in un anello unitario. Fattorialità dell'anello  $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , con  $A$  anello fattoriale.

Anelli noetheriani, anelli artiniani, teorema della base di Hilbert.

### **Spazi vettoriali**

Prime definizioni ed esempi. Sottospazi, intersezione di sottospazi, sottospazio generato da una parte, spazio quoziente, omomorfismi con teoremi relativi. Esempi.

Parti libere o linearmente indipendenti, sistemi di generatori, basi. Caratterizzazioni delle basi. Teorema di esistenza delle basi. Dimensione di uno spazio vettoriale. Spazi vettoriali isomorfi. Esempi.

Esistenza di un supplementare di un sottospazio di uno spazio vettoriale. Spazi vettoriali di dimensione finita. Teorema di Grassman. Esempi

Esistenza di spazi vettoriali di una qualunque dimensione. Struttura additiva di un corpo. Rango di un omomorfismo. Esempi.

### **Teoria dei campi**

Estensioni di un campo. Elementi algebrici, elementi trascendenti. Polinomio minimo di un elemento algebrico. Dipendenza lineare in un campo, grado di un campo rispetto ad un suo sottocampo, teorema di moltiplicazione dei gradi. Estensioni semplici, algebriche, di grado finito. Teorema di Artin-Steinitz. Estensione simbolica algebrica, estensione simbolica trascendente, primo teorema di prolungamento. Esempi.

Chiusura algebrica di un sottocampo in un campo, teorema di Cantor.

Campo di spezzamento di un polinomio, secondo teorema di prolungamento, isomorfismi tra campi di spezzamento di un polinomio, limitazione del numero degli automorfismi di un campo di spezzamento di un polinomio sul relativo sottocampo. Esempi.

Sottogruppi finiti del gruppo moltiplicativo di un campo. Radici  $n$ -esime dell'unità, radici primitive. Campi finiti, loro proprietà.

Campi algebricamente chiusi, chiusura algebrica di un campo.

Caratterizzazione dei polinomi aventi tutte le radici semplici. Polinomi separabili, estensioni separabili, polinomi separabili a coefficienti in un campo di caratteristica  $p$ . Endomorfismo di Frobenius di un campo di caratteristica  $p$ . Campi perfetti, loro caratterizzazione. Un esempio di campo non perfetto e di un polinomio irriducibile non separabile. Estensioni normali. Estensioni normali e separabili. Esempi.

Cenni sul teorema fondamentale dell'algebra e sul teorema di Wedderburn.

## **Teoria di Galois**

Gruppo di Galois di un'estensione, esempi. Sottocampo  $A^G$  degli invarianti di un gruppo  $G$  di automorfismi di un campo  $A$ , proprietà elementari. Legame tra  $|G|$  e  $[A : A^G]$  con  $A$  campo e  $G$  gruppo finito di automorfismi di  $A$  (senza dimostrazione).

Estensioni di Galois, estensioni di Galois di grado finito, loro caratterizzazioni. Teorema fondamentale della teoria di Galois. Esempi.

Gruppo di Galois di un polinomio, proprietà elementari. Criterio di irriducibilità per polinomi privi di radici multiple. Esempi.

Cenni sul problema della risolubilità per radicali di un'equazione, sul teorema di Ruffini-Abel e sul teorema di Galois.

## **Testi consigliati**

**M. Curzio, P. Longobardi, M. Maj**, *Lezioni di algebra*, Liguori, 1994 (II ed. 1996).

**T. W. Hungerford**, *Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

**N. Jacobson**, *Basic Algebra* I, II, Freeman, San Francisco, 1980.

**I. Stewart**, *Galois Theory*, Chapman and Hall, London, 1973.

e inoltre

**M. Curzio, P. Longobardi, M. Maj**, *Esercizi di Algebra - Una raccolta di prove di esame svolte*, Liguori, Napoli, 1995.