

**Programma del corso di
ALGEBRA II
ISTITUZIONI DI ALGEBRA SUPERIORE - I modulo
tenuto dalla prof. Patrizia LONGOBARDI
nell'anno accademico 2003–2004**

Richiami

Strutture algebriche, strutture quoziente, omomorfismi tra strutture. Gruppi. Gruppi ciclici. Elementi periodici e elementi aperiodici di un gruppo. Anelli. Caratteristica di un anello unitario. Campo dei quozienti di un dominio di integrità. Fattorizzazione in un monoide commutativo regolare. Monoidi fattoriali. Costruzione dell'anello dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in un anello unitario, teorema di addizione dei gradi, algoritmo della divisione euclidea, teorema di Ruffini e sue immediate conseguenze. Spazi vettoriali, esempi, sottospazi, intersezione di sottospazi, sottospazio generato da una parte, spazio quoziente, omomorfismi con teoremi relativi. Parti libere o linearmente indipendenti, sistemi di generatori, basi. Caratterizzazione delle basi. Teorema di esistenza delle basi. Dimensione di uno spazio vettoriale.

Anelli

Ideali massimali, ideali primi.

Anelli fattoriali. Esempi. Esistenza del massimo comun divisore e del minimo comune multiplo.

Anelli principali. Esempi. Ricerca del massimo comun divisore e del minimo comune multiplo. Teorema di Bézout.

Anelli euclidei. Esempi. Algoritmo euclideo per determinare il massimo comun divisore.

Polinomi

Proprietà universale. Polinomi su un campo. Principio d'identità dei polinomi. Polinomi su un anello fattoriale. Polinomi irriducibili. Polinomi primitivi, loro proprietà. Lemma di Gauss. Fattorialità dell'anello dei polinomi su un anello fattoriale. Criterio di Eisenstein. Polinomio derivato, sue proprietà elementari. Radici di un polinomio, radici semplici, radici multiple. Polinomio fondamentale su un campo finito. Polinomi irriducibili a coefficienti razionali, reali, complessi. Esempi.

Spazi vettoriali

Spazi vettoriali isomorfi. Esempi.

Esistenza di un supplementare di un sottospazio di uno spazio vettoriale. Spazi vettoriali di dimensione finita. Teorema di Grassman. Esempi.

Esistenza di spazi vettoriali di una qualunque dimensione. Struttura additiva di un corpo. Rango di un omomorfismo. Esempi.

Teoria dei campi

Estensioni di un campo. Elementi algebrici, elementi trascendenti. Polinomio minimo di un elemento algebrico. Dipendenza lineare in un campo, grado di un campo rispetto ad un suo sottocampo, teorema di moltiplicazione dei gradi. Estensioni semplici, algebriche, di grado finito. Teorema di Artin-Steinitz. Estensione simbolica algebrica, estensione simbolica trascendente, primo teorema di prolungamento. Esempi.

Chiusura algebrica di un sottocampo in un campo, teorema di Cantor.

Campo di spezzamento di un polinomio, secondo teorema di prolungamento, isomorfismi tra campi di spezzamento di un polinomio, limitazione del numero degli automorfismi

di un campo di spezzamento di un polinomio sul relativo sottocampo. Esempi.

Sottogruppi finiti del gruppo moltiplicativo di un campo. Radici n -esime dell'unità, radici primitive. Campi finiti, loro proprietà.

Campi algebricamente chiusi, chiusura algebrica di un campo.

Caratterizzazione dei polinomi aventi tutte le radici semplici. Polinomi separabili, estensioni separabili, polinomi separabili a coefficienti in un campo di caratteristica p . Endomorfismo di Frobenius di un campo di caratteristica p . Campi perfetti, loro caratterizzazione. Un esempio di campo non perfetto e di un polinomio irriducibile non separabile. Estensioni normali. Estensioni normali e separabili. Esempi.

Cenni sul teorema fondamentale dell'algebra e sul teorema di Wedderburn.

Teoria di Galois

Gruppo di Galois di un'estensione, esempi. Sottocampo A^G degli invarianti di un gruppo G di automorfismi di un campo A , proprietà elementari. Legame tra $|G|$ e $|A : A^G|$ con A campo e G gruppo finito di automorfismi di A (senza dimostrazione).

Estensioni di Galois, estensioni di Galois di grado finito, loro caratterizzazioni. Teorema fondamentale della teoria di Galois. Esempi.

Gruppo di Galois di un polinomio, proprietà elementari. Criterio di irriducibilità per polinomi privi di radici multiple. Esempi.

Cenni sul problema della risolubilità per radicali di un'equazione, sul teorema di Ruffini-Abel e sul teorema di Galois.

Testi consigliati

M. Curzio, P. Longobardi, M. Maj, *Lezioni di algebra*, Liguori, 1994 (II ed. 1996).

T. W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

N. Jacobson, *Basic Algebra* I, II, Freeman, San Francisco, 1980.

I. Stewart, *Galois Theory*, Chapman and Hall, London, 1973.

e inoltre

M. Curzio, P. Longobardi, M. Maj, *Esercizi di Algebra - Una raccolta di prove di esame svolte*, Liguori, Napoli, 1995.