Programma del corso di
ALGEBRA II
tenuto dalla prof. Patrizia LONGOBARDI
nell'anno accademico 2005–2006

Richiami

Strutture algebriche, strutture quoziente, omomorfismi tra strutture. Gruppi. Gruppi ciclici. Elementi periodici e elementi aperiodici di un gruppo. Anelli, sottoanelli, ideali, anello quoziente. Caratteristica di un anello unitario. Costruzione dell'anello dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in un anello unitario, teorema di addizione dei gradi, algoritmo della divisione euclidea, teorema di Ruffini e sue immediate conseguenze. Spazi vettoriali, esempi, sottospazi, intersezione di sottospazi, sottospazio generato da una parte, spazio quoziente, omomorfismi con teoremi relativi. Parti libere o linearmente indipendenti, sistemi di generatori, basi. Caratterizzazione delle basi. Teorema di esistenza delle basi. Dimensione di uno spazio vettoriale. Spazi vettoriali isomorfi.

Anelli

Elementi nilpotenti, elementi idempotenti. Anello dei quaternioni su $\mathbb{Z}$, corpo dei quaternioni su $\mathbb{R}$. Ideali massimali, ideali primi.

Campo dei quozienti di un dominio d'integrità. Sottocorpo minimo di un corpo.

Anello degli omomorfismi di un gruppo abeliano, analogo del teorema di Cayley.

Radicale di un ideale, nilradicale di un anello.

Fattorizzazione in un monoide commutativo regolare. Monoidi e anelli fattoriali. Esempi. Esistenza del massimo comun divisore e del minimo comune multiplo.

Anelli principali. Esempi. Ricerca del massimo comun divisore e del minimo comune multiplo. Teorema di Bézout.

Anelli euclidei. Esempi. Algoritmo euclideo per determinare il massimo comun divisore.

Anelli noetheriani, anelli artiniani.

Polinomi

Proprietà universale. Polinomi su un campo. Polinomi su un anello fattoriale: polinomi irriducibili, polinomi primitivi, loro proprietà. Lemma di Gauss. Fattorialità dell'anello dei polinomi su un anello fattoriale. Criterio di Eisenstein. Derivazioni. Polinomio derivato, sue proprietà elementari. Formula di Taylor. Radici di un polinomio, radici semplici, radici multiple. Polinomio fondamentale su un campo finito. Principio d'identità dei polinomi. Polinomi irriducibili a coefficienti interi, razionali, reali, complessi. Esempi. Il teorema della base di Hilbert.

Spazi vettoriali

Somma diretta di (una famiglia di) sottospazi e sua caratterizzazione. Esistenza di un supplementare di un sottospazio di uno spazio vettoriale. Spazi vettoriali di dimensione finita. Teorema di Grassman. Esempi.

Esistenza di spazi vettoriali di una qualunque dimensione. Struttura additiva di un corpo. Rango di un omomorfismo. Esempi.

Teoria dei campi

Estensioni di un campo. Elementi algebrici, elementi trascendenti. Polinomio minimo di un elemento algebrico. Dipendenza lineare in un campo, grado di un campo rispetto ad un suo sottocampo, teorema di moltiplicazione dei gradi. Estensioni semplici, algebriche, di grado finito. Estensione simbolica algebrica, estensione simbolica trascendente, primo teorema di prolungamento. Esempi.

Chiusura algebrica di un sottocampo in un campo, teorema di Cantor. Teorema di Artin-Steinitz.

Campo di spezzamento di un polinomio, secondo teorema di prolungamento, isomorfismi tra campi di spezzamento di un polinomio, limitazione del numero degli automorfismi di un campo di spezzamento di un polinomio sul relativo sottocampo. Esempi.

Sottogruppi finiti del gruppo moltiplicativo di un campo. Radici n-esime dell'unità, radici primitive. Campi finiti, loro proprietà.

Campi algebricamente chiusi, chiusura algebrica di un campo.

Cenni sul teorema fondamentale dell'algebra e sul teorema di Wedderburn.

Teoria di Galois

Gruppo di Galois di un'estensione, esempi. Sottocampo A^G degli invarianti di un gruppo G di automorfismi di un campo A.

Gruppo di Galois di un polinomio, proprietà elementari. Esempi.

Cenni sulle estensioni di Galois, sul teorema fondamentale della teoria di Galois, sul problema della risolubilità per radicali di un'equazione, sul teorema di Ruffini-Abel e sul teorema di Galois.

Testi consigliati

M. Curzio, P. Longobardi, M. Maj, *Lezioni di algebra*, Liguori, 1994 (II ed. 1996).

T. W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

N. Jacobson, *Basic Algebra* I, II, Freeman, San Francisco, 1980.

e inoltre

M. Curzio, P. Longobardi, M. Maj, *Esercizi di Algebra - Una raccolta di prove di esame svolte*, Liguori, Napoli, 1995.

I. Stewart, *Galois Theory* , Chapman and Hall, London, 1973.