

**Programma del corso di  
ALGEBRA II  
tenuto dalla prof. Patrizia LONGOBARDI  
nell'anno accademico 2014/2015**

**Richiami**

Strutture algebriche, struttura quoziente, omomorfismi tra strutture. Gruppi. Gruppi ciclici. Elementi periodici e elementi aperiodici di un gruppo. Anelli, sottoanelli, ideali, anello quoziente. Caratteristica di un anello unitario. Spazi vettoriali, esempi notevoli, sottospazi, intersezione di sottospazi, sottospazio generato da una parte, spazio quoziente, omomorfismi con teoremi relativi. Parti libere o linearmente indipendenti, sistemi di generatori, basi. Caratterizzazione delle basi. Teorema di esistenza delle basi. Dimensione di uno spazio vettoriale. Spazi vettoriali isomorfi.

**Anelli**

Elementi nilpotenti, elementi idempotenti. Anello dei quaternioni su  $\mathbb{Z}$ , corpo dei quaternioni su  $\mathbb{R}$ . Ideali massimali, ideali primi.

Campo dei quozienti di un dominio d'integrità. Sottocorpo minimo di un corpo.

Anello degli endomorfismi di un gruppo abeliano, analogo del teorema di *Cayley*.

Fattorizzazione in un monoide commutativo regolare. Monoidi e anelli fattoriali. Esempi. Esistenza del massimo comun divisore e del minimo comune multiplo.

Anelli principali. Esempi. Ricerca del massimo comun divisore e del minimo comune multiplo. Teorema di *Bézout*.

Anelli euclidei. Esempi. Algoritmo euclideo per determinare il massimo comun divisore.

Anelli noetheriani, anelli artiniani.

**Polinomi**

Costruzione degli anelli delle serie formali e dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in un anello unitario. Proprietà universale. Teorema di addizione dei gradi. Algoritmo della divisione euclidea. Polinomi su un campo. Polinomi su un anello fattoriale: polinomi irriducibili, polinomi primitivi, loro proprietà. Lemma di *Gauss*. Fattorialità dell'anello dei polinomi su un anello fattoriale. Criterio di *Eisenstein*. Derivazioni, polinomio derivato e sue proprietà elementari. Radici di un polinomio, radici semplici, radici multiple. Teorema di *Ruffini* e sue immediate conseguenze. Polinomio fondamentale su un campo finito. Principio d'identità dei polinomi. Polinomi irriducibili a coefficienti interi, razionali, reali, complessi. Esempi. Il teorema della base di Hilbert.

**Spazi vettoriali**

Somma diretta di (una famiglia di) sottospazi e sua caratterizzazione. Esistenza di un supplementare di un sottospazio di uno spazio vettoriale. Spazi vettoriali di dimensione finita. Teorema di *Grassman*. Esempi.

Esistenza di spazi vettoriali di una qualunque dimensione. Struttura additiva di un corpo. Rango di un omomorfismo. Esempi.

## Teoria dei campi

Estensioni di un campo. Elementi algebrici, elementi trascendenti. Polinomio minimo di un elemento algebrico. Dipendenza lineare in un campo, grado di un campo rispetto ad un suo sottocampo, teorema di moltiplicazione dei gradi. Estensioni semplici, algebriche, di grado finito. Estensione simbolica algebrica, estensione simbolica trascendente, primo teorema di prolungamento. Esempi.

Chiusura algebrica di un sottocampo in un campo, teorema di *Cantor*. Teorema di *Artin-Steinitz*.

Campo di spezzamento di un polinomio, secondo teorema di prolungamento, isomorfismi tra campi di spezzamento di un polinomio, limitazione del numero degli automorfismi di un campo di spezzamento di un polinomio sul relativo sottocampo. Esempi.

Sottogruppi finiti del gruppo moltiplicativo di un campo. Radici  $n$ -esime dell'unità, radici primitive. Campi finiti, loro proprietà.

Campi algebricamente chiusi, chiusura algebrica di un campo.

Cenni sul teorema fondamentale dell'algebra e sul teorema di *Wedderburn*.

## Teoria di Galois

Cenni sul gruppo di *Galois* di un'estensione, sul sottocampo  $A^G$  degli invarianti di un gruppo  $G$  di automorfismi di un campo  $A$ , sul gruppo di *Galois* di un polinomio, sulle estensioni di *Galois*, sul teorema fondamentale della teoria di *Galois*, sul problema della risolubilità per radicali di un'equazione, sul teorema di *Ruffini-Abel* e sul teorema di *Galois*.

## Testi consigliati

**M. Curzio, P. Longobardi, M. Maj**, *Lezioni di algebra*, Liguori, 1994, I ristampa 1996, II edizione 2014,

**T. W. Hungerford**, *Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1974,

**N. Jacobson**, *Basic Algebra* I, II, Freeman, San Francisco, 1980,

e inoltre

**M. Curzio, P. Longobardi, M. Maj**, *Esercizi di Algebra - Una raccolta di prove di esame svolte*, Liguori, Napoli, 1995, II ed. 2011,

**I. Stewart**, *Galois Theory*, Chapman and Hall, London, 1973.