ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2006/2007

Appello straordinario – 16 maggio 2007

Esercizio 1. Siano F un campo e $F^3 = \{(a, b, c)|a, b, c \in F\}$ l'usuale F-spazio vettoriale.

(i) Si considerino i vettori $v_1 = (2, 3, 4)$, $v_2 = (1, t, 2)$, $v_3 = (2, 3, 4)$ ed il sottospazio $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ di F^3.

- Si determini il valore c di $carF$ per cui risulti sempre $dimW = 3$, qualunque sia $t \in F$.
- Supposto $carF \neq c$, si precisi il valore di t per cui $dimW < 3$ e si individui $carF$ per cui tale valore è 0.
- Considerato il sottospazio U di F^3 generato da $\{(h, 1, 2), (0, 2, 1)\}$, si precisi quando U ha dimensione 1 e si verifichi che U non è mai supplementare di W.
- Supposto infine $h = 1$, si verifichi che la posizione $\Psi((a, b, c) + U) = 3a + b - 2c$ definisce un'applicazione Ψ di F^3/U in F, che tale applicazione è un isomorfismo di F-spazi vettoriali, e di essa si determini l'inversa.

Esercizio 2. Sia B un campo e si consideri il polinomio

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 6x + 35 \in B[x].$$

Supposto $B = \mathbb{Z}_p$ e distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,

- si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;
- posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti;
- si determini un campo di spezzamento E di $f(x)$ rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e una $\mathbb{Z}_p$-base.