

# ALGEBRA II

PROF.SSA PATRIZIA LONGOBARDI

A.A. 2007/2008

APPELLO STRAORDINARIO – 23 APRILE 2008

**Esercizio 1.** Siano  $F$  un campo e si consideri l'usuale  $F$ -spazio vettoriale  $F^3 = \{(a, b, c) | a, b, c \in F\}$ .

Si considerino i vettori  $v_1 = (2, 6, 10)$ ,  $v_2 = (3, 4, 5)$ ,  $v_3 = (7, 8, 15)$  ed il sottospazio  $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$  di  $F^3$ .

- In funzione della caratteristica di  $F$  si discuta la dimensione di  $W$  e si determinino, se esistono, due basi e due supplementari.
- Posto  $U = \langle v_3 \rangle = \langle (7, 8, 15) \rangle$ , si provi che la posizione

$$\psi((a, b, c) + U) = a + b - c$$

definisce un'applicazione  $\psi$  di  $F^3/U$  in  $F$  e che tale applicazione è un epimorfismo di  $F$ -spazi vettoriali. Si precisi poi se  $\psi$  è iniettiva.

**Esercizio 2.** Si consideri il polinomio

$$f(x) = 7x^4 + 137x^3 + 5x^2 + 7x + 19 \in \mathbb{Z}_p[x]$$

- (I) Distinguendo i casi  $p = 2$ ,  $p = 3$ ,  $p = 5$ ,  $p = 7$ ,
  - (i) si scomponga  $f(x)$  nel prodotto di fattori irriducibili di  $\mathbb{Z}_p[x]$ ;
  - (ii) si determini di  $f(x)$  un campo di spezzamento  $E$  rispetto a  $\mathbb{Z}_p$ , precisandone l'ordine, il grado  $[E : \mathbb{Z}_p]$  e due  $\mathbb{Z}_p$ -basi.
  - (iii) posto  $J = (f(x))$ , dell'anello  $\mathbb{Z}_p[x]/J$  si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti.
- (II) Posto sempre  $J = (f(x))$ , si precisi per quali valori di  $p \in \{2, 3, 5, 7\}$  il laterale  $(x - 1) + J$  è invertibile nell'anello  $\mathbb{Z}_p[x]/J$  e, in questi casi, si determini tale inverso.
- (III) Supposto  $p = 2$ , si dica se gli anelli  $\mathbb{Z}_2[x]/(f(x))$  e  $\mathbb{Z}_{16}$  sono isomorfi e, qualora lo siano, si costruisca un isomorfismo tra di essi.