

ALGEBRA II

PROF.SSA PATRIZIA LONGOBARDI

A.A. 2007/2008

APPELLO STRAORDINARIO – 23 APRILE 2008

Esercizio 1. Siano F un campo e si consideri l'usuale F -spazio vettoriale $F^3 = \{(a, b, c) | a, b, c \in F\}$.

Si considerino i vettori $v_1 = (2, 6, 10)$, $v_2 = (3, 4, 5)$, $v_3 = (7, 8, 15)$ ed il sottospazio $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ di F^3 .

- In funzione della caratteristica di F si discuta la dimensione di W e si determinino, se esistono, due basi e due supplementari.
- Posto $U = \langle v_3 \rangle = \langle (7, 8, 15) \rangle$, si provi che la posizione

$$\psi((a, b, c) + U) = a + b - c$$

definisce un'applicazione ψ di F^3/U in F e che tale applicazione è un epimorfismo di F -spazi vettoriali. Si precisi poi se ψ è iniettiva.

Esercizio 2. Si consideri il polinomio

$$f(x) = 7x^4 + 137x^3 + 5x^2 + 7x + 19 \in \mathbb{Z}_p[x]$$

- (I) Distinguendo i casi $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,
 - (i) si scomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;
 - (ii) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a \mathbb{Z}_p , precisandone l'ordine, il grado $[E : \mathbb{Z}_p]$ e due \mathbb{Z}_p -basi.
 - (iii) posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti.
- (II) Posto sempre $J = (f(x))$, si precisi per quali valori di $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ il laterale $(x - 1) + J$ è invertibile nell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ e, in questi casi, si determini tale inverso.
- (III) Supposto $p = 2$, si dica se gli anelli $\mathbb{Z}_2[x]/(f(x))$ e \mathbb{Z}_{16} sono isomorfi e, qualora lo siano, si costruisca un isomorfismo tra di essi.