ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2008/2009

appello straordinario – 28 aprile 2009

Esercizio 1. - Sia F un campo e si consideri l'usuale F-spazio vettoriale $F^3 = \{(a,b,c)|a,b,c \in F\}$. Si considerino i vettori $v_1 = (1,5,9)$, $v_2 = (7,3,1)$ e $v_3 = (-2,2,8)$ ed il sottospazio $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ di F^3 .

- In funzione della caratteristica di F si discuta la dimensione di W e si determinino una base e, se esistono, due supplementari .
- Posto $U = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle (1,5,9),(7,3,1) \rangle$, si descrivano gli elementi di U e si provi che la posizione $\psi((a,b,c)+U) = -11a+31b-16c$ definisce un'applicazione ψ di F^3/U in F e che tale applicazione è un epimorfismo di F-spazi vettoriali. Si precisi poi quando ψ è iniettiva e, in tal caso, se ne determini l'inversa.

Esercizio 2. - (i) Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^4 + 18x^3 + 7x^2 + 5 \in \ Z_p[x].$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,

- si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;
- si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi.

(ii) Con B campo, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ e 1_B unità di B, si considerino i polinomi

$$g_\alpha(x) = x^4 + 18x^3 + 7x^2 + \alpha 1_B \in B[x], \ \ h_\beta(x) = x^4 + 18x^3 + \beta 1_B x^2 + 5 \in B[x].$$

- In funzione di α e della caratteristica di B , si precisi quando 0 è radice di $g_\alpha(x)$, quando 0 è radice doppia, quando 1 è radice di $g_\alpha(x)$, quando 1 è radice doppia.
- In funzione di β e della caratteristica di B , si precisi quando 0 è radice di $h_\beta(x)$, quando 0 è radice doppia, quando 1 è radice di $h_\beta(x)$, quando 1 è radice doppia.