

# ALGEBRA II

PROF.SSA PATRIZIA LONGOBARDI

A.A. 2009/2010

I APPELLO STRAORDINARIO - 20 APRILE 2010

**Esercizio 1.** - Sia  $F$  un campo e si consideri l'usuale  $F$ -spazio vettoriale  $F^4 = \{(a, b, c, d) | a, b, c, d \in F\}$ . Con  $h \in F$ , si considerino i vettori  $v_1 = (2, 4, h, 0)$ ,  $v_2 = (3, 1, 4, 4)$  e  $v_3 = (1, 2, 3, 4)$ ,  $v_4 = (3, -1, 2, 5)$  ed i sottospazi  $W = \langle v_1, v_2 \rangle$  e  $V = \langle v_3, v_4 \rangle$  di  $F^4$ .

- In funzione di  $h$  e della caratteristica di  $F$ : si discutano la dimensione di  $W$  e quella di  $V$ ; si determinino un supplementare di  $W$  e un supplementare di  $V$ ; si individui quando i sottospazi  $W$  e  $V$  sono supplementari.
- Considerato  $V = \langle v_3, v_4 \rangle = \langle (1, 2, 3, 4), (3, -1, 2, 5) \rangle$ , si dimostri che la posizione  $\psi((a, b, c, d) + V) = a + c - d$  definisce un'applicazione  $\psi$  di  $F^4/V$  in  $F$ , provando poi che tale applicazione è un omomorfismo di  $F$ -spazi vettoriali, e studiando quando è iniettivo, quando è suriettivo, e, in caso di isomorfismo, individuandone l'inverso.

**Esercizio 2.** - Si consideri il polinomio

$$f(x) = 15x^6 + x^4 + 10x^2 + 7 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi:  $p = 2$ ,  $p = 3$ ,  $p = 5$ ,  $p = 7$ ,

- (I) si decomponga  $f(x)$  nel prodotto di fattori irriducibili di  $\mathbb{Z}_p[x]$ ;
- (II) si determini di  $f(x)$  un campo di spezzamento  $E$  rispetto a  $\mathbb{Z}_p$ , precisandone l'ordine, il grado  $[E : \mathbb{Z}_p]$  e due  $\mathbb{Z}_p$ -basi;
- (III) posto  $J = (f(x))$ , dell'anello  $\mathbb{Z}_p[x]/J$  si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti.

Posto ancora  $J = (f(x))$ , si precisi per quali valori di  $p \in \{2, 3, 5, 7\}$  il laterale  $(x - 7) + J$  è invertibile nell'anello  $\mathbb{Z}_p[x]/J$  e se ne determini l'inverso.

Infine si individuino i valori di  $p$  per cui risulti  $-1$  radice di  $f(x)$  e quello per cui  $-1$  risulti radice doppia.