

# ALGEBRA II

PROF.SSA PATRIZIA LONGOBARDI

A.A. 2010/2011

I APPELLO STRAORDINARIO - 3 MAGGIO 2011

**Esercizio 1.** - Sia  $F$  un campo e si consideri l'usuale  $F$ -spazio vettoriale  $F^3 = \{(a, b, c) | a, b, c \in F\}$ . Con  $h, k \in F$ , si considerino i vettori  $v_1 = (0, 1, 4)$ ,  $v_2 = (6, h, 3)$  e  $v_3 = (2, 7, 5)$ ,  $v_4 = (2, 2, 6)$ ,  $v_5 = (1, 5, k)$  ed i sottospazi  $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$  e  $V = \langle v_4, v_5 \rangle$  di  $F^3$ .

- In funzione di  $h$ , di  $k$  e della caratteristica di  $F$ : si discutano la dimensione di  $W$  e quella di  $V$ ; si determinino un supplementare di  $W$  e un supplementare di  $V$ ; si individui quando il sottospazio  $W + V$  coincide con  $F^3$ , e si precisi quando tale somma è diretta.
- Posto  $U = \langle v_2, v_3 \rangle = \langle (6, h, 3), (2, 7, 5) \rangle$ , si descrivano gli elementi di  $U$  e, in funzione di  $h$  e della caratteristica di  $F$ : si determini la dimensione di  $U$ , si verifichi quando la posizione  $\psi((a, b, c) + U) = a - b + c$  definisce un'applicazione  $\psi$  di  $F^3/U$  in  $F$ , e si provi poi che in tal caso l'applicazione è un epimorfismo di  $F$ -spazi vettoriali. Infine si studi quando è iniettivo e, in caso di isomorfismo, se ne precisi l'inverso.

**Esercizio 2.** - Si consideri il polinomio

$$f(x) = 15x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 104x + 189 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi:  $p = 2$ ,  $p = 3$ ,  $p = 5$ ,  $p = 7$ ,

- si decomponga  $f(x)$  nel prodotto di fattori irriducibili di  $\mathbb{Z}_p[x]$ ;
- si determini di  $f(x)$  un campo di spezzamento  $E$  rispetto a  $\mathbb{Z}_p$ , precisandone l'ordine, il grado  $[E : \mathbb{Z}_p]$  e due  $\mathbb{Z}_p$ -basi;
- Posto  $J = (f(x))$ , dell'anello  $\mathbb{Z}_p[x]/J$ , si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti. Posto sempre  $J = (f(x))$ , si precisi per quali valori di  $p \in \{2, 3, 5, 7\}$  il laterale  $(x - 2) + J$  è invertibile nell'anello  $\mathbb{Z}_p[x]/J$  e se ne determini l'inverso almeno in un caso.