ALGEBRA II

I appello straordinario - 17 aprile 2012

A.A. 2011/2012

1 - Sia F un campo e si consideri l' usuale F-spazio vettoriale

$$F^4 = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in F\}.$$

Con $h \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (1, 4, 4, 7)$, $v_2 = (2, 8, 3, h)$, $v_3 = (0, 0, 3, 6)$, $v_4 = (4, 4, 0, 4)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $V = \langle v_3, v_4 \rangle$ di F^4 .

(I) In funzione di h e della caratteristica di F:

- si discutano la dimensione di W e la dimensione di V;
- si determinino un supplementare di W e un supplementare di V;
- si individui quando il sottospazio $W + V$ coincide con F^4 e si precisi quando il sottospazio $W + V$ è somma diretta di W e V.

(II) Posto $h = 5$ e $U = \langle v_2, v_3 \rangle = \langle (2, 8, 3, 5), (0, 0, 3, 6) \rangle$, si descrivano gli elementi di U e, in funzione della caratteristica di F:

- si determini la dimensione di U;
- si verifichi che la posizione $\psi((a, b, c, d) + U) = (4a - b, 4c - 2d - a)$ definisce un'applicazione ψ di F^4/U in F^2 e che tale applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali, sempre suriettivo, e si precisi quando è iniettivo individuandone, in tal caso, l'inverso.

2 - Si consideri il polinomio

$$f(x) = 91x^5 + x^2 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

(III) posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti.