ALGEBRA II

I appello straordinario - 23 aprile 2013

A.A. 2012/2013

1 - Sia F un campo e si consideri l' usuale F-spazio vettoriale

$$F^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in F\}.$$

Con $h, k \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (4, h, 3)$, $v_2 = (7, 2, 8)$, $v_3 = (4, 8, 3)$, $v_4 = (6, 2, k)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $V = \langle v_3, v_4 \rangle$ di F^3 .

(I) In funzione di h, di k e della caratteristica di F:

- si discutano la dimensione di W e la dimensione di V;
- si determinino un supplementare di W e un supplementare di V;
- si individui quando si ha $F^3 = W \oplus V$.

(II) Posto $U = \langle v_2, v_3 \rangle = \langle (7, 2, 8), (4, 8, 3) \rangle$, si descrivano gli elementi di U e se ne determini la dimensione.

In funzione della caratteristica di F si verifichi quando la posizione

$$\psi((a, b, c) + U) = b - 2a$$

definisce un'applicazione ψ di F^3/U in F e in tal caso si provi che tale applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali, suriettivo e iniettivo. Infine si precisi l'inverso di ψ.

2 - Si consideri il polinomio

$$f(x) = 5x^7 + 6x^4 + 10x^3 + 3x^2 + 20x + 1 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$,

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

(III) posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti.

Posto sempre $J = (f(x))$, si precisi per quale valore di $p \in \{2, 3, 5\}$ il laterale $(x-1)+J$ è invertibile nell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ e se ne determini l'inverso.