ALGEBRA II

II appello straordinario - 27 novembre 2012

A.A. 2011/2012

1 - Sia F un campo e si consideri l' usuale F-spazio vettoriale

$$F^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in F\}.$$

Con $h \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (1, 0, 4)$, $v_2 = (3, 0, 2)$, $v_3 = (7, 2, 6)$, $v_4 = (4, 9, h)$, $v_5 = (1, 1, 0)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $V = \langle v_4, v_5 \rangle$ di F^3.

(I) In funzione di h e della caratteristica di F:

- si discutano la dimensione di W e la dimensione di V;
- si determinino un supplementare di W e un supplementare di V;
- si individui quando si ha$F^3 = W \oplus V$ e quando $F^3 = W + V$.

(II) Posto $U = \langle v_3, v_5 \rangle = \langle (7, 2, 6), (1, 1, 0) \rangle$, si descrivano gli elementi di U e:

- si determini la dimensione di U;
- si verifichi che la posizione $\psi((a, b, c) + U) = 6a - 6b - 5c$ definisce un'applicazione ψ di F^3/U in F e che tale applicazione è un isomorfismo di F-spazi vettoriali, precisandone l'inversa.

2 - Con $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, si consideri il polinomio

$$f_\alpha(x) = 5x^4 + 2x^3 + 7x^2 + \alpha x + 1 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Si precisi, in funzione di α, quando risulta:

$$1 \text{ radice di } f_\alpha(x), \quad -1 \text{ radice di } f_\alpha(x), \quad 2 \text{ radice di } f_\alpha(x), \quad -2 \text{ radice di } f_\alpha(x).$$

Utilizzando queste informazioni, distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, al variare di $\alpha \in \mathbb{Z}_p$:

(I) si decomponga $f_\alpha(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) si determini di $f_\alpha(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi.