ALGEBRA II

II appello straordinario - 13 novembre 2013

A.A. 2012/2013

1 - Sia F un campo e si consideri l'usuale F-spazio vettoriale

$$F^3 = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in F\}.$$

Con $h,k \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (0,h,3)$, $v_2 = (2,2,6)$, $v_3 = (3,1,2)$, $v_4 = (6,k,4)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $V = \langle v_3, v_4 \rangle$ di F^3 .

(I) In funzione di h, di k e della caratteristica di F:

- si discutano la dimensione di W e la dimensione di V;
- si determinino un supplementare di W e un supplementare di V;
- si individui quando si ha $F^3 = W + V$ e quando $F^3 = W \oplus V$.

(II) Posto $U = \langle v_2, v_3 \rangle = \langle (2,2,6), (3,1,2) \rangle$, si descrivano gli elementi di U e, in funzione della caratteristica di F:

- si determini la dimensione di U;
- si verifichi quando la posizione $\psi((a,b,c) + U) = a - b - c$ definisce un'applicazione ψ di F^3/U in F e in tal caso si provi che tale applicazione è un epimorfismo di F-spazi vettoriali. Si precisi poi quando ψ è anche iniettiva. Nel caso ψ non iniettiva si individuino elementi distinti del dominio aventi la stessa immagine.

2 - Si consideri il polinomio

$$f(x) = 25x^6 + 11x^4 + 13x^3 + 27x^2 + 18x + 1 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$,

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

(III) posto $J = (f(x))$, si studino gli elementi nilpotenti dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ individuandone, se esiste, uno non nullo.