

Programma del corso di

ALGEBRA I

tenuto dalla prof.ssa Mercede MAJ e dalla dott.ssa Maria TOTA

1 - Richiami sugli insiemi numerici.

Elementi di aritmetica: divisione euclidea, divisibilità, numeri primi, teorema fondamentale dell'aritmetica, teorema di Euclide, massimo comun divisore, teorema di Bezout, algoritmo per determinare il massimo comun divisore tra due interi ed i relativi coefficienti di Bezout. Esercizi.

2 - Richiami sulle relazioni e loro proprietà.

Richiami sulle relazioni d'ordine, sulle relazioni d'equivalenza e sul teorema fondamentale sulle relazioni d'equivalenza.

3 - Congruenze tra interi

Definizione, compatibilità con la somma ed il prodotto. Interi modulo n , loro somma e prodotto, interi invertibili modulo n , equazioni congruenziali lineari, teorema cinese del resto, indicatore di Eulero. Esercizi.

4 - Assiomi di Teoria degli insiemi

Assioma della scelta: funzione di scelta. Insiemi induttivi. Esempi. Lemma di Zorn.

5 - Cardinalità di insiemi

Insiemi equipotenti. Cardinalità di un insieme. Confronto tra cardinali. Teoremi di Cantor, Schroder, Bernstein (senza dimostrazione). Teorema di Hartogs (senza dimostrazione). Teorema di tricotomia. Teorema di Cantor. Funzione caratteristica su un sottoinsieme di un insieme S e cardinalità di $P(S)$. Insiemi finiti ed infiniti. Teorema di caratterizzazione degli insiemi infiniti. Insiemi numerabili. Unione di una successione di insiemi numerabili. Cardinalità di Z , Q ed R . La potenza del continuo. Ipotesi del continuo.

6 - Nozioni fondamentali sulle strutture algebriche.

Leggi di composizione interna, leggi commutative, leggi associative, parti stabili, operazione indotta, elemento neutro, elementi simmetrizzabili. Parte stabile generata da una parte. Teorema di associatività (senza dimostrazione). Elementi regolari,

teorema fondamentale e corollario relativo agli insiemi finiti. Congruenze, operazione quoziente. Nozione di struttura algebrica. I e II teorema di omomorfismo. Esempi.

Operazioni esterne. Definizioni ed esempi. Parti stabili. Unione ed intersezione di parti stabili. Parte stabile generata. Congruenze, operazione quoziente.

7 - Elementi di teoria dei gruppi

Definizione di gruppo, potenze di un elemento di un gruppo moltiplicativo, multipli di un elemento di un gruppo additivo. Sottogruppi, caratterizzazioni. Intersezione di sottogruppi, sottogruppo generato da una parte, sottogruppo generato dall'unione di una famiglia di sottogruppi. Gruppi di ordine ≤ 6 , gruppi simmetrici, gruppo generale lineare di grado n su un anello commutativo unitario.

Equivalenze in un gruppo, classi laterali, indice di un sottogruppo, Teorema di *Lagrange*. Sottogruppi normali, gruppo quoziente. Caratterizzazioni dei sottogruppi normali. Sottogruppi di un gruppo quoziente. Sottogruppo generato dall'unione di due sottogruppi di cui uno normale, e teorema relativo. Sottogruppi e quozienti di Z .

Teoremi di omomorfismo. Teorema di Cayley.

Gruppi ciclici, loro sottogruppi e quozienti, generatori, inverso del Teorema di *Lagrange*. Periodo di un elemento, gruppi periodici, gruppi aperiodici, gruppi misti. Teorema di *Fermat -Eulero*. Piccolo teorema di *Fermat*.

8 - Elementi di teoria degli anelli

Anelli, regole di calcolo, divisori dello zero, elementi nilpotenti, elementi invertibili. Domini di integrità, corpi, campi. Sottoanelli, sottocorpi. Esempi. Intersezione di sottoanelli, sottoanello generato da una parte. Ideali di un anello, anelli unitari privi di ideali non banali. Ideali massimali. Teorema di *Krull*.

Congruenze in un anello, anello quoziente, sottoanelli ed ideali di un anello quoziente, anello quoziente rispetto ad un ideale massimale. Teoremi di omomorfismo. L'anello degli interi ed i suoi quozienti.

Caratteristica di un anello unitario. Esempi. Caratterizzazioni. Caratteristica di un anello privo di divisori della zero.

Problemi di immersione: immersione di un anello in un anello unitario, campo dei quozienti di un dominio d'integrità.

9 - Elementi di teoria degli spazi vettoriali

Spazi vettoriali sinistri e destri su un corpo. Spazi vettoriali su campi. Esempi. Regole di calcolo. Sottospazi. Intersezione di sottospazi. Sottospazio generato da una parte. Esempi ed esercizi. Somma di sottospazi. Spazi quoziente. Applicazioni lineari con esempi. Nucleo ed immagine di una applicazione lineare con esempi ed esercizi. Primo teorema di omomorfismo. Combinazioni lineari. Sistemi di generatori. Dipendenza lineare. Parti libere con esempi. Basi: definizione, caratterizzazione, esempi. Teorema di esistenza delle basi.

Testi consigliati

M. CURZIO - P. LONGOBARDI - M. MAJ , Lezioni di Algebra, Liguori,

Napoli, 1994, I ristampa 1996.

L. CHILDS , Algebra, un'introduzione concreta, ETS, Pisa, 1989.

P. M. COHN , Algebra I, II ed., Wiley & Sons, N. Y., 1989.

I. N. HERSTEIN , Algebra, Editori Riuniti, Roma, 1982.

T. W. HUNGERFORD , Algebra, Springer, Berlin, 1974.

N. JACOBSON , Basic Algebra I, Freeman & Co., San Francisco, 1974.

S. MACLANE - G. BIRKHOFF , Algebra, Mursia, Milano, 1975.

Tutti i testi indicati contengono esercizi: una raccolta di esercizi svolti è la seguente:

M. CURZIO, P. LONGOBARDI, M. MAJ , Esercizi di Algebra - Una raccolta di prove di esame svolte, Liguori, Napoli, 1995.