GEOMETRIA IV (D.M. 509) A.A. 2011/2012
CDL IN MATEMATICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO

LUCA VITAGLIANO

Ai fini della preparazione dell'esame suggerisco il testo "R. Hartshorne, *Algebraic Geometry* (Graduate Texts in Mathematics), Springer". Questo documento contiene un elenco di complementi al libro di testo che, talvolta, sorvola sui dettagli. Tali complementi sono organizzati secondo i punti del programma cui si riferiscono, non costituiscono un testo organico e non sono da intendersi come dispense del corso.

Complementi al Libro di Testo

0.1. **Richiami di Algebra Commutativa.**

Proposition 1. *Sia* $\mathfrak{m}$ *un ideale dell'anello A.* $\mathfrak{m}$ *è massimale sse* $A/\mathfrak{m}$ *è un campo.*

Proof. Sia $\mathfrak{m}$ massimale, $a + \mathfrak{m} \in A/\mathfrak{m}$, $a \in A$ e $a + \mathfrak{m} \neq 0$. Dunque $a \notin \mathfrak{m}$. Perciò $(\mathfrak{m}, a) = A$. In particolare, esistono $b \in A$ e $c \in \mathfrak{m}$, tali che $1 = ab + c$. Da cui $1 = 1 + \mathfrak{m} = (a + \mathfrak{m})(b + \mathfrak{m})$. Sicché $(b + \mathfrak{m}) = (a + \mathfrak{m})^{-1}$. Viceversa sia $A/\mathfrak{m}$ un campo, $a \in A$ ma $a \notin \mathfrak{m}$. Dunque $a + \mathfrak{m} \neq 0$. Perciò esiste $b \in A$ tale che $(a+\mathfrak{m})(b+\mathfrak{m}) = ab+\mathfrak{m} = 1$. In altre parole, esistono $b \in A$ e $c \in \mathfrak{m}$ tali che $ab - 1 = c$, da cui $1 = ab - c$, cioè $1 \in (\mathfrak{m}, a)$. Se ne conclude che $(\mathfrak{m}, a) = A$, cioè $\mathfrak{m}$ è massimale. □

Proposition 2. *Sia* $\mathfrak{p}$ *un ideale dell'anello A.* $\mathfrak{p}$ *è primo sse* $A/\mathfrak{p}$ *è un dominio di integrità.*

Proof. Ovvio. □

Proposition 3. *Sia* $\mathfrak{m}$ *un ideale massimale dell'anello A. Allora* $\mathfrak{m}$ *è primo.*

Proof. Ogni campo è un dominio di integrità.

Remark 4. *Siano* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ *ideali in un anello A tali che* $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{p}$ *è primo. Allora* $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_1$ *o* $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_2$. *Infatti sia* $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{a}_2$. *Esiste dunque* $a \in \mathfrak{a}_2$ *tale che* $a \notin \mathfrak{p}$. *Sia ora* $b \in \mathfrak{a}_1$. $ab \in \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{p}$. *Giacché* $a \notin \mathfrak{p}$ *deve essere* $b \in \mathfrak{p}$. *Cioé* $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{p}$.

□

Proposition 5. *Sia* $\mathfrak{a}$ *un ideale dell'anello A e*

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{a \in A : a^n \in \mathfrak{a} \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}_0\} \subset A.$$

$\sqrt{\mathfrak{a}}$ *è un ideale.*

Proof. Sia $a \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ tale che $a^n \in \mathfrak{a}$, e $b \in A$. Allora $(ab)^n = a^n b^n \in \mathfrak{a}$, sicché $ab \in \mathfrak{a}$. Ora siano $a, b \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ tali che $a^n, b^m \in \mathfrak{a}$, e $N = n + m + 1$. Allora

$$(a + b)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k}.$$

Se $k < n$ allora

$$N - k > N - n = m + 1 > m.$$

Perciò $a^k b^{N-k} \in \mathfrak{a}$ per ogni $k = 1, \ldots, N$ e $(a+b)^N \in \mathfrak{a}$. Da cui $a + b \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. □

Proposition 6. *Sia $\mathfrak{a}$ un ideale dell'anello A, e $B \subset A$ un sottoanello che contiene $\mathfrak{a}$. Detta $i : B \longrightarrow A$ l'inclusione, l'applicazione*

$$B/\mathfrak{a} \ni b + \mathfrak{a} \longmapsto i(b) + \mathfrak{a} \in A/\mathfrak{a} \tag{1}$$

è un monomorfismo che prende valori nell'immagine B' di B mediante la proiezione $A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$. Se B è un ideale, anche B' è un ideale.

Proof. Ovvio. □

In virtù della precedente proposizione, si può identificare l'anello $B/\mathfrak{a}$ con il sottoanello di $A/\mathfrak{a}$ immagine di $B/\mathfrak{a}$ mediante l'omomorfismo (1). Nel seguito adotteremo sempre questo punto di vista.

Proposition 7. *Sia $\mathfrak{a}$ un ideale dell'anello A. La mappa*

$$\{\text{ideali di } A \text{ che contengono } \mathfrak{a}\} \ni I \longmapsto I/\mathfrak{a} \in \{\text{ideali di } A/\mathfrak{a}\} \tag{2}$$

è biunivoca.

Proof. **Iniettività**. Siano $I, I' \subset A$ ideali che contengono A e $I/\mathfrak{a} = I'/\mathfrak{a}$. Allora, per ogni $a' \in I'$ esiste $a \in I$ tale che $a' - a = b \in \mathfrak{a}$. Da cui

$$a' = b + a \in I + \mathfrak{a} = I.$$

Dunque $I' \subset I$. Similmente $I \subset I'$. **Suriettività**. Sia $J \subset A/\mathfrak{a}$ un ideale e $\overline{J}$ la sua controimmagine mediante la proiezione $A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$. $\overline{J}$ è un ideale di A. Inoltre $J \ni 0$ da cui $\overline{J} \supset \mathfrak{a}$. Infine J è l'immagine di $\overline{J}$ mediante la (2). □

Proposition 8. *Siano $\mathfrak{a}, I$ ideali dell'anello A tali che $I \supset \mathfrak{a}$. Allora l'applicazione*

$$A/I \ni a + I \longmapsto (a + \mathfrak{a}) + I/\mathfrak{a} \in \frac{A/\mathfrak{a}}{I/\mathfrak{a}} \tag{3}$$

è un ben definito isomorfismo di anelli.

Proof. Ovviamente la (3) è un ben definito omomorfismo. **Iniettività**. Sia $a \in A$ tale che $(a+\mathfrak{a})+I/\mathfrak{a} = 0$. Allora $a + \mathfrak{a} \in I/\mathfrak{a}$, da cui $a \in I$. **Suriettività**. Ovvia. □

Proposition 9. *Sia A un anello. Le seguenti due proprietà sono equivalenti:*

1. ***(proprietà della catena ascendente)*** *Ogni catena ascendente di ideali di A si stabilizza.*
2. *ogni ideale di A è finitamente generato.*
3. *ogni sottomodulo di un A-modulo finitamente generato è finitamente generato.*

Proof. 1. $\Longrightarrow$ 2. Supponiamo per assurdo che esista un ideale $\mathfrak{a}$ di A che non sia finitamente generato. Sia $a_1 \in \mathfrak{a}$, e $\mathfrak{a}_1 = (a_1)$. Ovviamente $\mathfrak{a}_1 \neq \mathfrak{a}$, sicché esiste $a_2 \in \mathfrak{a}$, tale che $a_2 \notin \mathfrak{a}_1$. Sia $\mathfrak{a}_2 = (a_1, a_2)$. Si ha $\mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{a}_2$. Proseguendo così, si trova una catena ascendente di ideali di A che non si stabilizza, il che è assurdo. 2. $\Longrightarrow$ 1. Supponiamo per assurdo che esista una catena ascendente

$$\mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{a}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{a}_k \subsetneq \cdots$$

di ideali di A che non si stabilizza. Dunque, per ogni k esiste $a_k \in \mathfrak{a}_k$ tale che $a_k \notin \mathfrak{a}_{k-1}$. Sia $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$. Per ipotesi $\mathfrak{a}$ è finitamente generato. Siano $b_1, \ldots, b_m$ generatori di $\mathfrak{a}$. Allora esiste k tale che $b_1, \ldots, b_m \in \mathfrak{a}_k$, da cui $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_k$ che è assurdo. □

Definition 10. *Un elemento d di un dominio di integrità D si dice primo se $d \neq 0$ e, dati $a, b \in D$ tali che d divide ab, si ha che d divide a oppure d divide b. d si dice irriducibile, dati $c, c' \in D$ tali che $d = cc'$, si ha che c o c' è invertibile (in altre parole non esiste una fattorizzazione di d in fattori non invertibili, in particolare $d \neq 0$).*

Proposition 11. *Sia d un elemento del dominio di integrità D. Allora d è primo sse $(d) \subset D$ è un ideale primo.*

Proof. Ovvio. □

Proposition 12. *Sia d un elemento primo del dominio di integrità D. Allora d è irriducibile.*

Proof. Siano $a, b \in D$ tali che $d = ab$. In particolare d divide ab. Giacché d è primo, d divide o a o b. Senza ledere la generalità della dimostrazione, supponiamo che d divida a, cioè esiste $c \in D$ tale che $a = dc$. Si ha allora, $d = dcb$ e, siccome D è un dominio, $1 = cb$. In particolare b è invertibile. □

Proposition 13. *Un dominio di integrità D è un anello fattoriale sse ogni elemento irriducibile è primo.*

Proof. Osserviamo, innazitutto, che ogni elemento non invertibile di un dominio si fattorizza nel prodotto di elementi irriducibili. Supponiamo che ogni elemento irriducibile di D sia primo. Si tratta di dimostrare che la fattorizzazione di cui sopra è unica (a meno di permutazioni dei fattori e prodotto dei fattori per elementi invertibili). Siano dunque $c_1, \ldots, c_n, c'_1, \ldots, c'_m \in D$ elementi irriducibili tali che, $n \leq m$ e

$$c_1 \cdots c_n = c'_1 \cdots c'_m = c \in D.$$

Dimostriamo, per induzione su n, che le due fattorizzazioni di c essenzialmente coincidono. Sia $n = 1$. Giacché c_1 è irriducibile, allora $m = 1$ e l'unicità della fattorizzazione è provata. Sia ora $n > 1$. Giacchè c_1 è primo, divide uno dei c'_i. Senza ledere la generalità della dimostrazione supponiamo che c_1 divida c'_1, cioè $c'_1 = dc_1$ per qualche $d \in D$. c'_1 è irriducibile, perciò d è invertibile e, senza ledere la generalità della dimostrazione possiamo assumere che $d = 1$. Allora $c_1 = c'_1$ e

$$c_2 \cdots c_n = c'_2 \cdots c'_m.$$

Usiamo infine l'ipotesi di induzione. □

0.2. **Spazi irriducibili.**

Remark 14. *Sia X uno spazio irriducibile e $U \subset X$ un aperto non vuoto. U è denso. Infatti $X = \overline{U} \cup (X \smallsetminus U)$. Giacché $X \smallsetminus U \neq X$ deve essere $\overline{U} = X$. Inoltre, siano $C_1, C_2 \subset X$ chiusi tali che $U = (C_1 \cap U) \cup (C_2 \cap U)$. Allora $C_1 \cup C_2 \supset \overline{U} = X$. Perciò $C_1 \cup C_2 = X$. Da cui C_1 o C_2 è uguale ad X e perciò o $C_1 \cap U$ o $C_2 \cap U$ è uguale ad U.*

Remark 15. *Sia X uno spazio irriducibile e $U, V \subset X$ aperti non vuoti. allora $U \cap V$ è non vuoto. Infatti, supponiamo per assurdo che $U \cap V = \varnothing$. Allora $X = (X \smallsetminus U) \cup (X \smallsetminus V)$. Giacché X è irriducibile deve essere $X \smallsetminus U = X$ o $X \smallsetminus V = X$, cioè $U = \varnothing$ o $V = \varnothing$, che è assurdo.*

Remark 16. *Sia X uno spazio topologico e $Y \subset X$ un sottospazio irriducibile. Allora $\overline{Y}$ è irriducibile. Infatti siano $C_1, C_2 \subset X$ chiusi tali che $\overline{Y} = (C_1 \cap \overline{Y}) \cup (C_2 \cap \overline{Y})$. Giacché $\{C_1, C_2\}$ ricopre $\overline{Y}$, ricopre anche Y, cioè $Y = (C_1 \cap Y) \cup (C_2 \cap Y)$, da cui $C_1 \cap Y = Y$ o $C_2 \cap Y = Y$. Sia, per esempio, $C_1 \cap Y = Y$. Allora $C_1 \supset Y$ da cui $C_1 \supset \overline{Y}$.*

Remark 17. *L'immagine continua di uno spazio irriducibile è irriducibile. Infatti, sia* $f : X \longrightarrow Y$ *un'applicazione continua tra spazi topologici e sia* X *irriducibile. Inoltre siano* $Z_1, Z_2 \subset Y$ *chiusi tali che* $f(X) \subset Z_1 \cup Z_2$. *Allora* $X \subset f^{-1}(Z_1 \cup Z_2) = f^{-1}(Z_1) \cup f^{-1}(Z_2)$. *D'altronde* $f^{-1}(Z_1)$ *e* $f^{-1}(Z_2)$ *sono chiusi, sicché* $X \subset f^{-1}(Z_1)$ *(e quindi* $f(X) \subset Z_1$*) o* $X \subset f^{-1}(Z_2)$ *(e quindi* $f(X) \subset Z_2$*).*

Remark 18. *Sia* X *uno spazio topologico e* $P \in X$ *un punto. Allora* $\overline{\{P\}} \subset X$ *è un chiuso irriducibile. Infatti,* $\{P\}$ *è irriducibile e, perciò, lo è anche la sua chiusura.*

0.3. **Varietà Affini.**

Remark 19. *Ogni aperto non vuoto di una varietà è denso. Infatti ogni varietà è irriducibile.*

Remark 20. *Sia* X *una varietà e* $U, V \subset X$ *aperti non vuoti. allora* $U \cap V$ *è non vuoto. Infatti,* X *è irriducibile.*

Remark 21. *La topologia di un insieme algebrico* $X \subset \boldsymbol{A}^n$ *coincide con la topologia di Zariski determinata da* $A(X)$. *Infatti sia* $C \subset X$ *un sottoinsieme. Allora* $I(C) \supset I(X)$. *Consideriamo* $\mathfrak{a} = I(C)/I(X) \subset A(X)$. *Se* C *è chiuso in* X*, allora è chiuso in* $\boldsymbol{A}^n$ *e*

$$\begin{aligned} C &= Z(I(C)) \\ &= \{x \in \boldsymbol{A}^n : f(x) = 0 \textit{ per ogni } f \in I(C)\} \\ &= \{x \in X : (f + I(X))(x) = 0 \textit{ per ogni } f + I(X) \in \mathfrak{a}\} \\ &= Z(\mathfrak{a}) \subset X. \end{aligned}$$

Viceversa. Sia $\mathfrak{a}$ *un ideale di* $A(X)$ *tale che* $C = Z(\mathfrak{a})$. $\mathfrak{a} = I/I(X)$ *per qualche ideale* $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$*, e*

$$\begin{aligned} C &= Z(\mathfrak{a}) \\ &= \{x \in X : (f + I(X))(x) = 0 \textit{ per ogni } f + I(X) \in \mathfrak{a}\} \\ &= \{x \in \boldsymbol{A}^n : f(x) = 0 \textit{ per ogni } f \in I\} \\ &= Z(I) \subset \boldsymbol{A}^n, \end{aligned}$$

e dunque C *è chiuso in* $\boldsymbol{A}^n$ *e quindi anche in* X.

Theorem 22. *Sia* $X \subset \boldsymbol{A}^n$ *una varietà affine e* $Y \subset X$ *un aperto. Allora* $\dim Y = \dim X$

Proof. In questa dimostrazione una barra $\overline{(\cdot)}$ indicherà sempre la chiusura in $\boldsymbol{A}^n$. Ricordiamo innanzitutto che $\overline{Y} = X$, infatti ogni aperto in uno spazio irriducibile è denso. Ora, se Z è un chiuso di Y si ha $Z = \overline{Z} \cap Y$. Infatti $Z \subset \overline{Z} \cap Y$. D'altronde $Z = C \cap Y$ per qualche chiuso C di $\boldsymbol{A}^n$. Giacché $Z \subset C$, si ha anche $\overline{Z} \subset C$ e dunque $Z = C \cap Y \supset \overline{Z} \cap Y$. Ora, sia $Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_m$ una catena (ascendente) di chiusi irriducibili e distinti di Y. Consideriamo $\overline{Z}_0 \subset \overline{Z}_1 \subset \cdots \subset \overline{Z}_m$. È una catena (ascendente) di chiusi irriducibili distinti di X. Infatti gli $\overline{Z}_i$ sono irriducibili, perché la chiusura di un sottospazio irriducibile è irriducibile, e sono distinti perché, se fosse $\overline{Z}_i = \overline{Z}_{i+1}$, si avrebbe anche $Z_i = \overline{Z}_i \cap Y = \overline{Z}_{i+1} \cap Y = Z_{i+1}$. Ne consegue che $\dim Y \leq \dim X$. In particolare $\dim Y$ è finita. Sia essa d. Allora esiste una ascendente massimale di chiusi irriducibili e distinti di Y di lunghezza massima: $Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_d$. Deve essere $Z_0 = P$ un punto e $Z_d = Y$. Consideriamo la catena di chiusi irriducibili distinti di X:

$$P = \overline{Z}_0 \subset \overline{Z}_1 \subset \cdots \subset \overline{Z}_d = X. \tag{4}$$

È una catena massimale. Infatti, non può essere prolungata agli estremi. Inoltre, se $C \subset X$ è un chiuso tale che $\overline{Z}_i \subset C \subset \overline{Z}_{i+1}$, si ha $Z_i \subset C \cap Y \subset Z_{i+1}$, da cui, per esempio, $Z_i = C \cap Y$ e $\overline{Z}_i = C$. La catena (4) ha anche lunghezza massima tra quelle che iniziano con P. Ogni altra catena di chiusi irriducibili e distinti di X che inizia con P, interseca Y in una catena di chiusi irriducibili e distinti.

Sia $\mathfrak{m} = I(P)$ l'ideale massimale corrispondente a P. Allora

$$\mathfrak{m} \supset I(\overline{Z}_1) \supset \cdots \supset I(\overline{Z}_d) = A(X)$$

è una catena (discendente) di ideali primi distinti di lunghezza massima tra quelle che iniziano con $\mathfrak{m}$. Perciò $\mathsf{altezza}\,\mathfrak{m} = d$. D'altronde

$$\begin{aligned}\dim A(X) &= \mathsf{altezza}\,\mathfrak{m} + \dim(A(X)/\mathfrak{m})\\ &= \mathsf{altezza}\,\mathfrak{m} + \dim k\\ &= \mathsf{altezza}\,\mathfrak{m}\end{aligned}$$

□

0.4. **Anelli Graduati.** Se $S = \bigoplus_k S_k$ è un anello graduato, indichiamo anche $[S] := S_0$.

Proposition 23. *Sia $\mathfrak{a}$ un ideale dell'anello graduato $S = \bigoplus_k S_k$. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(1) $\mathfrak{a} = \sum_k \mathfrak{a} \cap S_k$.
(2) *$\mathfrak{a}$ è generato da elementi omogenei.*
(3) *Per ogni $a \in \mathfrak{a}$, le componenti omogenee di a appartengono ad $\mathfrak{a}$.*

Proof. Osserviamo, preliminarmente, che $\sum_k \mathfrak{a} \cap S_k \subset \mathfrak{a}$.

1. $\Longrightarrow$ 2. $\mathfrak{a}$ è generato da $\bigcup_k \mathfrak{a} \cap S_k$.

2. $\Longrightarrow$ 3. Siano $a^k_{i_k}$ generatori omogenei di grado k di $\mathfrak{a}$. Ogni $a \in \mathfrak{a}$ si scrive

$$a = \sum_{k,i_k} b^k_{i_k} a^k_{i_k}, \quad b^k_{i_k} \in S.$$

Sia $b^{kh}_{i_k}$ la componente omogenea di grado h di $b^k_{i_k}$. La componente omogenea di grado ℓ di a è allora

$$\sum_{\substack{h+k=\ell\\ i_k}} b^k_{i_k} a^k_{i_k} \in \mathfrak{a}$$

3. $\Longrightarrow$ 1. Sia $a \in A$, e siano $\dots, a_k, \dots$ le sue componenti omogenee. $a = \sum_k a_k \in \sum_k \mathfrak{a} \cap S_k$. □

Proposition 24. *Sia S un anello graduato e $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset S$ ideali omogenei. $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ e $\sqrt{\mathfrak{a}}$ sono ideali omogenei. Inoltre $\mathfrak{a}$ è primo sse da $ab \in \mathfrak{a}$ con a e b elementi omogenei di S segue che $a \in \mathfrak{a}$ o $b \in \mathfrak{a}$.*

Proof. Che $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ siano omogenei è ovvio (si usa, per esempio, la terza caratterizzazione degli ideali omogenei). Ora sia $a \in S$ tale che $a^n \in \mathfrak{a}$. Siano $a_1, \dots, a_m$ tutte le componenti omogenee non nulle di a e $k_1, \dots, k_m$ i rispettivi gradi. Dimostriamo, per induzione su m, che $a_1, \dots, a_m \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Se $m = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Ora, sia $m > 1$. Assumiamo $k_1 < \cdots < k_m$. Allora

$$a^n = a^n_m + b$$

in cui a^n_m è omogenea di grado nk_m e b non ha componenti di grado nk_m. Concludiamo che a^n_m è una componente omogenea di a^n e, giacché $\mathfrak{a}$ è omogeneo, appartiene ad $\mathfrak{a}$, cioè $a_m \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Dunque anche

$$a_1 + \cdots + a_{m-1} = a - a_m \in \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Ora basta usare l'ipotesi di induzione. Infine supponiamo che da $ab \in \mathfrak{a}$ con a e b elementi omogenei di S segue che $a \in \mathfrak{a}$ o $b \in \mathfrak{a}$. Siano $a', b' \in S$ elementi (eventualmente non omogenei) tali che $a'b' \in \mathfrak{a}$ e $b' \notin \mathfrak{a}$. Proviamo che $a' \in \mathfrak{a}$. Siano $a_1, \ldots, a_m$ e $b_1, \ldots, b_p$ le componenti omogenee (non nulle) di a e b rispettivamente e siano $k_1, \ldots, k_m$ e $h_1, \ldots, h_p$ i rispettivi gradi, con $k_1 < \cdots < k_n$ e $h_1 < \cdots < h_p$. Dimostriamo, per induzione su m che $a_1, \ldots, a_m \in \mathfrak{a}$. Se $m = 0$, non c'è nulla da dimostrare. Sia $m > 0$. $a_m b_p$ è una componente omogenea (di grado $k_m + h_p$) di $a'b'$. Giacché $\mathfrak{a}$ è omogeneo, segue che $a_m b_p \in \mathfrak{a}$ e, dunque, o $a_m \in \mathfrak{a}$ o $b_p \in \mathfrak{a}$. Se $a_m \in \mathfrak{a}$ allora

$$(a_1 + \cdots + a_{m-1})b = (a - a_m)b = ab - a_m b \in \mathfrak{a}$$

e possiamo usare l'ipotesi di induzione. Se $b_p \in \mathfrak{a}$ allora

$$a(b_1 + \cdots + b_{p-1}) = a(b - b_p) = ab - ab_p \in \mathfrak{a},$$

e $a_m b_{p-1}$ è una componente omogenea di $a(b_1 + \cdots + b_{p-1})$. Perciò, $a_m b_{p-1} \in \mathfrak{a}$. Giacché $b \notin \mathfrak{a}$, ragionando successivamente come sopra troveremo k tale che $b_k \notin \mathfrak{a}$, ma $a_m b_k \in \mathfrak{a}$ e ne concluderemo di nuovo che $a_m \in \mathfrak{a}$. Useremo, allora, l'ipotesi di induzione. □

Remark 25. *Sia $S = k[x_0, \ldots, x_n]$, $\mathfrak{a}$ un ideale omogeneo di S e*

$$Z_{\boldsymbol{P}}(\mathfrak{a}) := \{P \in \boldsymbol{P}^n : \text{“}f(P) = 0\text{” per ogni polinomio omogeneo } f \in \mathfrak{a}\}.$$

Infine sia $\pi : \mathbf{A}^{n+1} \smallsetminus \{O\} \longrightarrow \boldsymbol{P}^n$ la proiezione. Allora $\pi^{-1}(Z_{\boldsymbol{P}}(\mathfrak{a})) = Z(\mathfrak{a}) \smallsetminus \{O\}$. Infatti, $(x_0, \ldots, x_n) \in \pi^{-1}(Z_{\boldsymbol{P}}(\mathfrak{a}))$ sse $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ per ogni polinomio omogeneo $f \in \mathfrak{a}$. Siccome $\mathfrak{a}$ è omogeneo, è generato dai suoi elementi omogenei. Dunque $(x_0, \ldots, x_n) \in \pi^{-1}(Z_{\boldsymbol{P}}(\mathfrak{a}))$ sse $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ per ogni $f \in \mathfrak{a}$, cioè sse $(x_0, \ldots, x_n) \in Z(\mathfrak{a})$.

Indichiamo con S_+ l'ideale omogeneo irrilevante di $S = k[x_0, \ldots, x_n]$. Cioè

$$S_+ := (x_0, \ldots, x_n) = \bigoplus_{k>0} S_k.$$

Ovviamente S_+ è un ideale massimale, in particolare è radicale.

Proposition 26. *Sia $S = k[x_0, \ldots, x_n]$ e $\mathfrak{a}$ un ideale omogeneo di S. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) $Z_{\boldsymbol{P}}(\mathfrak{a}) = \varnothing$.
(2) $\sqrt{\mathfrak{a}} \supset S_+$ *(cioè $\sqrt{\mathfrak{a}} = S_+$ o $\sqrt{\mathfrak{a}} = S$).*
(3) $\mathfrak{a} \supset S_k$ *per qualche k.*

Proof. 1. $\Longrightarrow$ 2. Si ha

$$Z(\mathfrak{a}) \smallsetminus \{O\} = \pi^{-1}(Z_{\boldsymbol{P}}(\mathfrak{a})) = \pi^{-1}(\varnothing) = \varnothing$$

da cui, o $Z(\mathfrak{a}) = \varnothing$, cioè $\sqrt{\mathfrak{a}} = S$, o $Z(\mathfrak{a}) = \{O\}$, cioè $\sqrt{\mathfrak{a}} = I(\{O\}) = S_+$.

2. $\Longrightarrow$ 3. Dall'ipotesi segue che $x_0, \ldots, x_n \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ e dunque esistono interi $k_0, \ldots, k_n$ tali che $x_0^{k_0}, \ldots, x_n^{k_n} \in \mathfrak{a}$. Sia $k := k_0 + \cdots + k_n$. Allora ogni elelemnto in S_k è somma di monomi ciascuno dei quali contiene almento un fattore del tipo $x_i^{k_i}$ e dunque $S_k \subset \mathfrak{a}$.

3. $\Longrightarrow$ 1. Dall'ipotesi segue che $\mathfrak{a} \ni x_0^k, \ldots, x_n^k$. Da cui

$$Z_{\boldsymbol{P}}(\mathfrak{a}) \subset Z_{\boldsymbol{P}}(x_0^k, \ldots, x_n^k) = \varnothing$$

perché $x_0^k, \ldots, x_n^k$ si annullano solo in O. □

Corollary 27. *$S_+ \subset S$ è l'unico ideale radicale omogeneo non banale tale che $Z_{\boldsymbol{P}}(\mathfrak{a}) = \varnothing$.*

Remark 28. *Sia $X \subset \boldsymbol{P}^n$ e*

$$I_{\boldsymbol{P}}(X) := (\text{polinomi omogenei che “si annullano in } X\text{”}) \subset S = k[x_0, \ldots, x_n].$$

Per definizione, $I_{\boldsymbol{P}}(X)$ è un ideale omogeneo di S. Inoltre $Z_{\boldsymbol{P}}(I_{\boldsymbol{P}}(X)) \supset X$.

Remark 29. *$I_{\boldsymbol{P}}(X) = I(\pi^{-1}(X))$. Infatti $I(\pi^{-1}(X))$ è un ideale omogeneo il che si dimostra così: se X è vuoto, $I_{\boldsymbol{P}}(X) = S = I(\varnothing) = I(\pi^{-1}(X))$. Ora, sia $[x_0, \ldots, x_n] \in X$ e $f \in I(\pi^{-1}(X))$. Siano $f_1, \ldots, f_q$ le componenti omogenee di f e abbiano gradi $d_1, \ldots, d_q$ rispettivamente. Dunque per ogni $\lambda \in k$*

$$\begin{aligned} 0 &= f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) \\ &= f_1(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) + \cdots + f_q(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) \\ &= f_1(x_0, \ldots, x_n)\lambda^{d_1} + \cdots + f_q(x_0, \ldots, x_n)\lambda^{d_q} \end{aligned}$$

che è un polinomio in λ. Per il principio di identità dei polinomi, deve essere

$$f_1(x_0, \ldots, x_n) = \cdots = f_q(x_0, \ldots, x_n) = 0.$$

Cioè le componenti omogenee di f appartengono ancora ad $I(\pi^{-1}(X))$. Ora l'uguaglianza $I_{\boldsymbol{P}}(X) = I(\pi^{-1}(X))$ è ovvia.

Proof.

Proposition 30 (Nullstellensatz omogeneo)**.** *Sia $S = k[x_0, \ldots, x_n]$ e $\mathfrak{a}$ un ideale omogeneo di S tale che $Z_{\boldsymbol{P}}(\mathfrak{a}) \neq \varnothing$. Allora $I_{\boldsymbol{P}}(Z_{\boldsymbol{P}}(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$.*

□

Proof.

$$\begin{aligned} I_{\boldsymbol{P}}(Z_{\boldsymbol{P}}(\mathfrak{a})) &= I(\pi^{-1}(Z_{\boldsymbol{P}}(\mathfrak{a}))) \\ &= I(Z(\mathfrak{a}) \setminus \{O\}) \\ &= I(Z(\mathfrak{a})) \\ &= \sqrt{\mathfrak{a}}. \end{aligned}$$

Dove abbiamo usato che $I(Z(\mathfrak{a}) \setminus \{O\}) = I(Z(\mathfrak{a}))$, il che è vero. Infatti $I(Z(\mathfrak{a})) \subset I(Z(\mathfrak{a}) \setminus \{O\})$ d'altronde $I(Z(\mathfrak{a}) \setminus \{O\})$ è un ideale omogeneo non banale e O è annullato da tutti i polinomi omogenei di grado positivo. □

0.5. **Dimensione delle Varietà Proiettive.**

Proposition 31. *Sia X uno spazio topologico e $Y \subset X$ un sottospazio. Allora* $\dim Y \leq \dim X$.

Proof. In questa dimostrazione, una barra $\overline{(\bullet)}$ indica la chiusura in X. Sia $C_0 \subset \cdots \subset C_n$ una catena ascendente di chiusi irriducibili e distinti di Y. Allora $\overline{C}_0 \subset \cdots \subset \overline{C}_n$ è una catena ascendente di chiusi irriducibili e distinti di Y. □

Proposition 32. *Sia X uno spazio topologico e $\{U_\alpha\}_\alpha$ un ricoprimento aperto di X. Allora* $\dim X = \sup_\alpha \dim U_\alpha$.

In questa dimostrazione, una barra $\overline{(\bullet)}$ indica la chiusura in X. In virtù della proposizione precedente si ha $\sup_\alpha \dim U_\alpha \leq \dim X$. Resta da dimostrare che $\sup_\alpha \dim U_\alpha \geq \dim X$. Sia $C_0 \subset \cdots \subset C_n$ una catena di chiusi irriducibili e distinti di X. Poniamo $C_i(\alpha) := C_i \cap U_\alpha$. $C_i(\alpha)$ è aperto in C_i e, perciò, o è vuoto, o è irriducibile e denso. Sia $\bar{\alpha}$ tale che $C_0(\bar{\alpha}) \neq \varnothing$. Esiste perché gli U_α ricoprono X. Allora

$\overline{C_0(\bar{\alpha})} \subset \cdots \subset C_n(\bar{\alpha})$ è una catena di chiusi irriducibili di $U_{\bar{\alpha}}$. Inoltre i $C_i(\bar{\alpha})$ sono distinti, infatti $\overline{C_i(\bar{\alpha})} = C_i$. Perciò $\dim X \leq \sup_\alpha \dim U_\alpha$.

Theorem 33. *Sia $Y \subset \boldsymbol{P}^n$ una varietà proiettiva. Allora* $\dim Y = \dim S(Y) - 1$.

Dimostrazione (una bozza). In questa dimostrazione usiamo, dove non indicato, le stesse notazioni di Hartshorne. Osserviamo, preliminarmente, che un omeomorfismo preserva l'irriducibilità e la dimensione. Innanzitutto $\dim Y \leq \dim S(Y) - 1$. Infatti catene ascendenti di chiusi irriducibili e distinti di Y corrispondono a catene discendenti di ideali primi omogenei di $S(Y)$ (che contengono $I_{\boldsymbol{P}}(Y)$) distinti tra loro (e dall'ideale irrilevante $S_+/I_{\boldsymbol{P}}(Y)$). Ogni tale catena può essere prolungata aggiungendo l'ideale irrilevante.

Ora, sia $\{U_0, \ldots, U_n\}$ il ricoprimento aperto affine canonico di $\boldsymbol{P}^n$ e $\varphi_i : U_i \longrightarrow \boldsymbol{A}^n$ l'omeomorfismo canonico, $i = 0, \ldots, n$. Poniamo $Y_i = \varphi(Y \cap U_i)$. $\{Y \cap U_0, \ldots, Y \cap U_n\}$ è un ricoprimento aperto di Y. Perciò

$$\begin{aligned}\dim Y &= \sup_i \dim(Y \cap U_i)\\ &= \sup_i \dim Y_i\\ &= \sup_i \dim A(Y_i).\end{aligned}$$

Si può dimostrare (vedi sotto) che

$$A(Y_i)[x_i, x_i^{-1}] \simeq S(Y)_{\overline{x_i}}{}^{1}, \tag{5}$$

in cui $\overline{f} := f + I_{\boldsymbol{P}}(Y) \in S(Y)$ per ogni $f \in S$. Osserviamo che il campo delle frazioni di $A(Y_i)[x_i, x_i^{-1}]$ è esattamente $K(Y_i)[x_i, x_i^{-1}]$ il cui grado di trascendenza è 1 + il grado di trascendenza di $K(Y_i)$. Infatti, se $\{h_1, \ldots, h_d\}$ è una base di trascendenza di $K(Y_i)$, allora $\{h_1, \ldots, h_n, x_i\}$ è una base di trascendenza di $K(Y_i)[x_i, x_i^{-1}]$. Ne deduciamo che

$$\begin{aligned}\dim A(Y_i) &= \text{grado di trascendenza di } K(Y_i)\\ &= \text{grado di trascendenza di } K(Y_i)[x_i, x_i^{-1}] - 1\\ &= \dim A(Y_i)[x_i, x_i^{-1}] - 1\\ &= \dim S(Y)_{\overline{x_i}} - 1.\end{aligned}$$

Dunque

$$\dim S(Y) - 1 \geq \dim Y = \sup_i \dim S(Y)_{\overline{x_i}} - 1.$$

Mostriamo ora che

$$\dim S(Y) \leq \sup_i \dim S(Y)_{\overline{x_i}}.$$

Più precisamente, mostreremo che, se $Y_i \neq \emptyset$ allora $S(Y) \leq S(Y)_{\overline{x_i}}$. Osserviamo che $Y_i \neq \emptyset$ sse $Y \cap U_i \neq \emptyset$ sse esiste un punto di Y dove x_i non si annulla. Cioè $x_i \notin I(Y)$ o, equivalentemente $\overline{x_i} \neq 0$. Senza ledere la generalità della dimostrazione assumiamo $i = 0$. Giacché $S(Y)$ è un dominio e $\overline{x_0} \neq 0$, il morfismo canonico

$$\psi : S(Y) \longrightarrow S(Y)_{\overline{x_0}}$$

---

[1]Qui, se B è un anello, poniamo $B[z, z^{-1}] := B[z, z']/(zz' - 1)$.

è iniettivo e $S(Y)$ si può rivedere come un sottodominio di $S(Y)_{\overline{x_0}}$. Perciò

$$K(S(Y)) \subset K(S(Y)_{\overline{x_0}})$$

e

$$\begin{aligned}\dim S(Y) &= \text{grado di trascendenza (su } k\text{) di } K(S(Y))\\ &\le \text{grado di trascendenza (su } k\text{) di } K(S(Y)_{\overline{x_0}})\\ &= \dim S(Y)_{\overline{x_0}}.\end{aligned}$$

Perciò

$$\dim Y = \dim S(Y) - 1$$

Mostriamo ora che

$$A(Y_i)[x_i, x_i^{-1}] \simeq S(Y)_{\overline{x_i}}$$

È sufficiente considerare il caso $i = 0$. Osserviamo, preliminarmente, che $A(Y_0)[x_0, x_0^{-1}]$ si identifica con

$$k[y_1, \dots, y_n][x_0, x_0^{-1}]/I(Y_0)[x_0, x_0^{-1}]$$

e, nel seguito, sottointenderemo questa identificazione. Allora la mappa

$$\begin{aligned}\Psi : A(Y_0)[x_0, x_0^{-1}] &\longrightarrow S(Y)_{\overline{x_0}}\\ \sum_{q\in\mathbb{Z}} G_q(y_1, \dots, y_n)x_0^q &\longmapsto \sum_{q\in\mathbb{Z}} G_q(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0)x_0^q\end{aligned}$$

è un isomorfismo. □

0.6. **Morfismi.**

Proposition 34. *Siano f, g funzioni regolari su una varietà. Se f e g coincidono su un aperto non vuoto $U \subset X$ allora coincidono su X.*

Proof. Infatti f e g coincidono sul chiuso $(f - g)^{-1}(0)$ che contiene U. Giacché U è denso in X segue che f e g coincidono in X. □

Lemma 35. *Sia X una varietà e $Y \subset \mathbf{A}^n$ una varietà affine. Una mappa $F : X \longrightarrow Y$ è un morfismo sse $F^*(\overline{x_i})$ è una funzione regolare per ogni $i = 1, \dots, n$ (qui, indichiamo con $\overline{x_i}$ la restrizione ad Y della i-esima funzione coordinata x_i su $\mathbf{A}^n$).*

Proof. Giacchè $\overline{x_i}$ è una funzione regolare su Y, $F^*(\overline{x_i})$ è regolare se F è un morfismo. Viceversa, sia $F^*(\overline{x_i})$ regolare per ogni i. Dimostriamo, innanzitutto, che F è continua. Osserviamo che, giacché Y ha la topologia del sottospazio, F è continua sse la sua composizione F_1 con l'inclusione $Y \subset \mathbf{A}^n$ è continua. Ovviamente $F_1^*(x_i) = F(\overline{x_i})$ ed è, perciò, una funzione regolare per ogni i. Sia $C = Z(T)$ un chiuso di $\mathbf{A}^n$, $T \subset A$. Allora

$$\begin{aligned}F_1^{-1}(C) &= \{P \in X : f(F_1(P)) = 0 \text{ per ogni } f \in T\}\\ &= \{P \in X : F_1^*(f)(P)) = 0 \text{ per ogni } f \in T\}\\ &= Z(F_1^*(T)).\end{aligned}$$

ora, sia $f = f(x_1, \dots, x_n)$. Allora

$$\begin{aligned}F_1^*(f)(P) &= f(F_1^*(x_1)(P), \dots, F_1^*(x_n)(P))\\ &= f(F_1^*(x_1), \dots, F_1^*(x_n))(P)\end{aligned}$$

per ogni $P \in X$. Queso mostra che $F_1^*(f)$ è una funzione regolare per ogni polinomio $f \in A$. In particolare $F_1^*(f)$ è continua e, perciò, $Z(F_1^*(f))$ è chiuso in X. Allora

$$Z(F_1^*(T)) = \bigcap_{f \in T} Z(F_1^*(f))$$

è pure chiuso in X. Perciò F_1, e quindi anche F, è continua. Resta da dimostrare che F^* manda funzioni regolari (localmente definite) in funzioni regolari (localmente definite). Questo è evidente perché se $f, g \in A$ e $g \neq 0$ nell'aperto $U \subset \mathbf{A}^n$, allora f/g è una funzione regolare su U e

$$F_1^*(f/g) = F_1^*(f)/F_1^*(g)$$

è una funzione regolare su $F_1^{-1}(U)$ in quanto rapporto di funzioni regolari. □

Remark 36. *Sia $F : X \longrightarrow Y$ un morfismo di varietà $Z \subset Y$ una sottovarietà e $\operatorname{im} F \subset Z$. $F : X \longrightarrow Y$ è un morfismo sse $F : X \longrightarrow Z$ è un morfismo. Innanzitutto $F : X \longrightarrow Y$ è continua sse lo è $F : X \longrightarrow Z$ perché Z ha la topologia del sottospazio. Inoltre se $F : X \longrightarrow Z$ è un morfismo, lo è anche $F : X \longrightarrow Y$ perché ottenuta componendo col morfismo $Z \subset Y$. Infine, supponiamo che $F : X \longrightarrow Y$ sia un morfismo. Allora anche $F : X \longrightarrow Z$ è un morfismo perché ogni funzione regolare (localmente definita) su Z è restrizione di una funzione regolare (localmente definita) su Y (perché restrizione di una funzione regolare localmente definita sull'ambiente proiettivo o affine) e i loro pull-back mediante $F : X \longrightarrow Z$ e $F : X \longrightarrow Y$ rispettivamente, coincidono.*

Remark 37. *Siano $f_i : U_i \longrightarrow k$ funzioni regolari definite su aperti U_i di $\mathbf{A}^m$, $i = 1, \ldots, \ell$. Sia $U := \bigcap_{i=1}^{\ell} U_i$ e consideriamo la mappa $F : U \longrightarrow \mathbf{A}^{m+\ell}$ data da*

$$F(x_1, \ldots, x_m) := (x_1, \ldots, x_m, f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_\ell(x_1, \ldots, x_m)).$$

$\operatorname{im} F$ è una sottavarietà quasi-affine di $\mathbf{A}^{m+\ell}$ e $F : U \longrightarrow \operatorname{im} F$ è un isomorfismo il che si dimostra come segue. Osserviamo preliminarmente che $F : U \longrightarrow \mathbf{A}^{m+\ell}$ è un morfismo perché a componenti regolari per definizione. Consideriamo la proiezione

$$\pi : \mathbf{A}^{m+\ell} \ni (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+\ell}) \longmapsto (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{A}^m.$$

anch'essa è un morfismo per lo stesso motivo. Dimostriamo ora che $\operatorname{im} F \subset \mathbf{A}^{m+\ell}$ è una sottovarietà quasi-affine. Ne concludiamo che $F : U \longrightarrow \operatorname{im} F$ è un omeomorfismo sulla sua immagine con inversa $\pi : \operatorname{im} F \longrightarrow U$. Dimostriamo ora che $\operatorname{im} F \subset \mathbf{A}^{m+\ell}$ è una sottovarietà quasi-affine.

(1) *$\operatorname{im} F$ è chiuso. Per dimostrarlo è sufficiente mostrare che lo è localmente. Sia $V_i \subset U$ un aperto tale che $f_i = g_i/h_i$ per ogni i, g_i, h_i polinomi. Per definizione di funzione regolare, U è ricoperto da tali aperti. ALlora U è ricoperto anche dalle loro intersezioni $V = \bigcap_{i=1}^{\ell} V_i$. Ora*

$$\begin{aligned} \operatorname{im} F \cap \pi^{-1}(V) &= \{(x_1, \ldots, x_{m+\ell}) : x_{m+i} = f_i(x_1, \ldots, x_m),\ i = 1, \ldots, \ell\} \\ &= \{(x_1, \ldots, x_{m+\ell}) : h_i(x_1, \ldots, x_m)x_{m+i} = g_i(x_1, \ldots, x_m),\ i = 1, \ldots, \ell\} \\ &= Z(T) \cap \pi^{-1}(V). \end{aligned}$$

Con

$$T = \{h_i x_{m+i} - g_i\}_{i=1}^{\ell} \subset k[x_1, \ldots, x_{m+\ell}].$$

(2) *$\operatorname{im} F$ è irriducibile. Infatti è immagine omeomorfa dello spazio irriducibile $\mathbf{A}^m$.*

Infine $F : U \longrightarrow \operatorname{im} F$ e $F^{-1} : \operatorname{im} F \longrightarrow U$ sono morfismi. F^{-1} lo è perché è composta dei morfismi $\operatorname{im} F \subset \mathbf{A}^{m+\ell}$ e π. $F : U \longrightarrow \operatorname{im} F$ perché $F : U \longrightarrow \mathbf{A}^{m+\ell}$ lo è.

Example 38. *Un morfismo invertibile e bicontinuo la cui inversa non è un morfismo: Sia* $X := \{(x, y) \in \mathbf{A}^2 : x^3 = y^2\}$. *X è una varietà. Il morfismo* $\Phi : \mathbf{A}^1 \ni t \longmapsto (t^2, t^3) \in \mathbf{A}^2$ *prende chiaramente valori in X, perciò* $\varphi : \mathbf{A}^1 \ni t \longmapsto (t^2, t^3) \in X$ *è un morfismo. La mappa* $\psi : X \longrightarrow \mathbf{A}^1$ *definita da*

$$\psi(x, y) := \begin{cases} 0 & se\ (x, y) = (0, 0) \\ y/x & se\ (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

è ben definita e inverte φ. *Inoltre* ψ *è continua, infatti i chiusi in* $\mathbf{A}^1$ *sono sottoinsiemi finiti le cui controimmagini mediante una'applicazione biettiva sono ancora finite e, perciò, chiuse in X. Tuttavia* ψ *non è un morfismo.Se, per assurdo, lo fosse, allora sarebbe anche una funzione regolare su X. In particolare, esisterebbero polinomi* $f = f(x, y)$ *e* $g = g(x, y)$ *tali che*

$$\begin{aligned} &1) \quad g(x, y) \neq 0 \text{ in un intorno di } (0, 0) \text{ in } X \\ &2) \quad \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \psi(x, y) \text{ in un intorno di } (0, 0) \text{ in } X \end{aligned} \tag{6}$$

da cui

$$f(0, 0) = 0 \text{ e } g(0, 0) \neq 0$$

Tuttavia, la (6) implica

$$x f(x, y) = y g(x, y) \text{ in un intorno di } (0, 0) \text{ in } X$$

e, perciò, in tutto X. Dunque

$$y g(x, y) = x f(x, y) + h(x, y)(x^3 - y^2)$$

da cui

$$y g(0, y) = -y^2 h(0, y) \Longrightarrow g(0, y) = -y h(0, y) \Longrightarrow g(0, 0) = 0.$$

Sia D un dominio di integrità e K il relativo campo delle frazioni. Dunque $D \subset K$. Sia $\mathfrak{m} \subset D$ un'ideale massimale e $D_{\mathfrak{m}}$ la localizzazione di D su $D \setminus \mathfrak{m}$. Ovviamente $D_{\mathfrak{m}} \subset K$.

0.7. **Anelli di Funzioni sulle Varietà.**

Remark 39. *Sia X una varietà,* $P \in X$ *e* $f : X \longrightarrow k$ *una funzione regolare. Se* $f(P) \neq 0$, *allora* $f \neq 0$ *in un intorno aperto di P in X. Infatti f è continua e perciò* $\{Q \in X : f(Q) \neq 0\}$ *è un aperto di X contenente P.*

Remark 40. *Osserviamo, preliminarmente, che A è un anello locale con ideale massimale* $\mathfrak{m}$ *sse* $\mathfrak{m}$ *è un ideale tale che*

$$A \setminus \mathfrak{m} = \{\text{elementi invertibili di } A\}.$$

Infatti sia A locale e $\mathfrak{m}$ *è il suo ideale massimale. Se* $a \in A \setminus \mathfrak{m}$ *non fosse invertibile, sarebbe contenuto in un ideale massimale diverso da* $\mathfrak{m}$, *il che è assurdo. Viceversa, se ogni elemento invertibile è in* $A \setminus \mathfrak{m}$, *vuol dire che gli elementi non invertibili di A sono in* $\mathfrak{m}$ *che, perciò, contiene tutti gli ideali non banali. In particolare, per mostrare che A è un anello locale con ideale massimale* $\mathfrak{m}$ *è sufficiente mostrare che gli elementi di A non in* $\mathfrak{m}$ *sono invertibili.*

Remark 41. *Ogni localizzazione di un anello A è un A-modulo in modo ovvio.*

Remark 42. *Sia D un dominio* $T_1 \subset T_2 \subset D$ *sottoinsiemi moltiplicativi che non contengono* 0. *Ovviamente, esiste un morfismo naturale* $T_1^{-1}D \longrightarrow T_2^{-1}D$ *e tale morfismo è iniettivo. In particolare, D e tutte le sue localizzazioni non banali sono incluse nel campo delle frazioni* $K(D)$

Sia D un dominio e $S \subset T \subset D$ sottoinsiemi moltiplicativi che non contengono 0. In $S^{-1}D$ consideriamo

$$S^{-1}T := \{t/s \in S^{-1}D : t \in T\}.$$

Si tratta di un sottoinsieme moltiplicativo, infatti $1 \in S^{-1}T$, inoltre

$$\frac{t}{s}\frac{t'}{s'} = \frac{tt'}{ss'} \in S^{-1}T$$

se $t, t' \in T$. Infine $S^{-1}T$ non contiene 0. Perciò possiamo localizzare e considerare

$$(S^{-1}T)^{-1}S^{-1}D$$

Proposition 43. *La localizzazione è transitiva, cioè esiste un isomorfismo canonico*

$$\varphi : (S^{-1}T)^{-1}S^{-1}D \longrightarrow T^{-1}D$$

Proof. Sia $\frac{d/s}{t/s'} \in (S^{-1}T)^{-1}S^{-1}D$. Poniamo

$$\varphi\left(\frac{d/s}{t/s'}\right) := \frac{ds'}{ts}.$$

Osserviamo che $st \in T$ sicché $\frac{ds'}{ts}$ è ben definito. Inoltre non dipende dalla scelta di un rappresentante per $\frac{d/s}{t/s'}$. Infatti

$$\begin{aligned}\frac{d/s}{t/s'} = \frac{d_1/s_1}{t_1/s_1'} &\Longleftrightarrow \frac{d}{s}\frac{t_1}{s_1'} = \frac{d_1}{s_1}\frac{t}{s'}\\ &\Longleftrightarrow dt_1s_1s' = d_1tss_1'\\ &\Longleftrightarrow \frac{ds'}{ts} = \frac{d_1s_1'}{t_1s_1}.\end{aligned}$$

Dunque φ è ben definita. φ è, inoltre, un morfismo di anelli. Infatti siano $a, a_1 \in (S^{-1}T)^{-1}S^{-1}D$ con $a = \frac{d/s}{t/s'}$ e $a_1 = \frac{d_1/s_1}{t_1/s_1'}$. Allora

$$\begin{aligned}a + a_1 &= \frac{d/s}{t/s'} + \frac{d_1/s_1}{t_1/s_1'}\\ &= \frac{(t_1/s_1')(d/s) + (t/s')(d_1/s_1)}{(t/s')(t_1/s_1')}\\ &= \frac{t_1d/s_1's + td_1/s's_1}{tt_1/s's_1'}\\ &= \frac{(t_1ds's_1 + s_1'std_1)/s_1'ss's_1}{tt_1/s's_1'},\end{aligned}$$

sicché

$$\begin{aligned}\varphi(a_1+a_2) &= \varphi\left(\frac{(t_1ds's_1+s_1'std_1)/s_1'ss's_1}{tt_1/s's_1'}\right)\\ &= \frac{(t_1ds's_1+s_1'std_1)s's_1'}{tt_1s_1'ss's_1}\\ &= \frac{t_1ds's_1+s_1'std_1}{tt_1s_1's}\\ &= \frac{ds'}{ts}+\frac{d_1s_1'}{t_1s_1}\\ &= \varphi(a)+\varphi(a_1).\end{aligned}$$

Similmente

$$aa_1 = \frac{d/s}{t/s'}\cdot\frac{d_1/s_1}{t_1/s_1'} = \frac{dd_1/ss_1}{tt_1/s's_1'},$$

sicché $\varphi(aa_1) =$

$$\begin{aligned}\varphi(aa_1) &= \varphi\left(\frac{dd_1/ss_1}{tt_1/s's_1'}\right)\\ &= \frac{dd_1s's_1'}{tt_1ss_1}\\ &= \frac{ds'}{ts}\cdot\frac{d_1s_1'}{t_1s_1}\\ &= \varphi(a)\cdot\varphi(a_1).\end{aligned}$$

φ è iniettivo. Infatti, sia a come sopra e $\varphi(a)=0$. Allora

$$0=\varphi(a)=\varphi\left(\frac{d/s}{t/s'}\right)=\frac{ds'}{ts},$$

da cui $ds'=0$. Giacché $s'\neq 0$, deve essere $d=0$ da cui $a=0$. Infine φ è suriettivo. Infatti sia $d/t\in T^{-1}D$ e si consideri $a=\frac{d/1}{t/1}\in(S^{-1}T)^{-1}S^{-1}D$. Allora $\varphi(a)=d/t$. □

Ora, sia D un dominio e $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}\subset D$ ideali primi. Poniamo $S:=D\smallsetminus\mathfrak{q}$ e $T:=D\smallsetminus\mathfrak{p}$. Applicando la proposizione precedente troviamo

$$(S^{-1}T)^{-1}D_{\mathfrak{q}}\simeq D_{\mathfrak{p}}.$$

Inoltre è possibile descrivere $S^{-1}T$ in termini di ideali. Più precisamente

$$\begin{aligned}D_{\mathfrak{q}}\smallsetminus S^{-1}T &= \{p/s : p\notin T\}\\ &= \{p/s : p\in\mathfrak{p}\}\\ &= \mathfrak{p}\cdot D_{\mathfrak{q}},\end{aligned}$$

che è l'ideale in $D_{\mathfrak{q}}$ generato da $\mathfrak{p}\subset D\subset D_{\mathfrak{q}}$ (Osserviamo che si tratta di un ideale primo, essendo il suo complemento un insieme moltiplicativo). Concludendo vale il

Corollary 44. *$(D_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{p}\cdot D_{\mathfrak{q}}}$ e $D_{\mathfrak{p}}$ sono canonicamente isomorfi.*

Corollary 45. *$K(D_{\mathfrak{q}})$ e $K(D)$ sono canonicamente isomorfi per ogni ideale primo $\mathfrak{q}$.*

Proof. $K(D_{\mathfrak{q}}) = (D_{\mathfrak{q}})_{(0)} = (D_{\mathfrak{q}})_{(0)\cdot D_{\mathfrak{q}}} = D_{(0)} = K(D)$. □

Proposition 46. *Sia $\mathcal{M}$ l'insieme degli ideali massimali di D. $D = \bigcap_{\mathfrak{m}\in\mathcal{M}} D_{\mathfrak{m}}$ (in cui abbiamo interpretato D e i $D_{\mathfrak{m}}$ come sottoanelli di $K(D)$).*

Proof. Come abbiamo già osservato $D \subset D_{\mathfrak{m}}$ per ogni $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}$. Si tratta dunque di dimostrare che $\bigcap_{\mathfrak{m}\in\mathcal{M}} D_{\mathfrak{m}} \subset D$. Sia allora $f \in K(D)$ tale che $f \in D_{\mathfrak{m}}$ per ogni $\mathfrak{m}$. Vogliamo dimostrare che $f \in D$. A questo scopo consideriamo

$$I_f := \{d \in D : fd \in D\} \subset D.$$

Ovviamente I_f è un ideale in D. O $I_f = D$ oppure $I_f \subset M \in \mathcal{M}$. Nel primo caso $1 \in I_f$ cioè $f \in D$. Sia dato, per assurdo, il secondo caso. Si ha $f \in D_M$, cioè $f = a/b$ con $a \in D$ e $b \in D \smallsetminus M$. D'altronde $fb = a \in D$, cioè $b \in I_f \subset M$, che è assurdo. □

Lemma 47. *Sia X una varietà. Allora, per ogni $P \in X$, esiste un isomorfismo $K(\mathcal{O}_P(X)) \longrightarrow K(X)$.*

Proof. Sia $P \in X$. Consideriamo la mappa:

$$K(\mathcal{O}_P(X)) \ni \frac{f}{g} \longmapsto \frac{f}{g} \in K(X), \tag{7}$$

in cui il rapporto a destra è un rapporto di funzioni localmente definite in X. Giacché il rapporto di funzioni regolari è una funzione regolare sul suo dominio, la mappa (7) è, chiaramente, un ben definito morfismo iniettivo di anelli. È anche suriettivo. Infatti sia $h \in K(X)$. h è regolare in un aperto di X. Dunque, in un aperto più piccolo, è del tipo F/G con F e G polinomi. In particolare $F, G \in \mathcal{O}_P(X)$ e la (7) manda $F/G \in K(\mathcal{O}_P(X))$ in h. □

Theorem 48. *Sia $X \subset \mathbf{A}^n$ una varietà affine. Allora*

1. $\mathcal{O}(X) \simeq A(X)$,
2. $\mathcal{O}_P(X) \simeq A(X)_{\mathfrak{m}_P}$, *in cui $\mathfrak{m}_P \subset A(X)$ è l'ideale (massimale) del punto $P \in X$,*
3. $K(X) \simeq K(A(X))$, *in particolare $K(X)$ è un'estensione di k con grado di trascendenza pari a* $\dim X$.

Proof. Interpreteremo sempre le coordinate affini come funzioni su X. Ricordiamo, preliminarmente, che tali funzioni sono funzioni regolari, perciò $A(X) \subset \mathcal{O}(X)$. Dimostriamo ora la 2. A questo scopo consideriamo la mappa:

$$A(X)_{\mathfrak{m}_P} \ni \frac{f}{g} \longmapsto \frac{f}{g} \in \mathcal{O}_P(X), \tag{8}$$

in cui il rapporto a destra è un rapporto di funzioni localmente definite intorno a P. Si osservi che tale rapporto è ben definito perché $g \in A(X) \smallsetminus \mathfrak{m}_P$ e, dunque, non si annulla in P, ma, allora, non si annulla su un intero intorno aperto di P. La mappa (8) è, chiaramente, un morfismo di anelli. Inoltre è chiaramente iniettiva. Infine è suriettiva. Infatti sia $h \in \mathcal{O}_P(X)$, cioè h è il germe di una funzione regolare definita su X intorno a P. In particolare, in un intorno di P eventualmente più piccolo, è del tipo F/G con F e G polinomi tali che $G \neq 0$ in un intorno di P in X (da cui $G(P) \neq 0$). Consideriamo $H := F|_X/G|_X \in A(X)_{\mathfrak{m}_P}$. Ovviamente, la (8) mappa H in h. Ne concludiamo che $\mathcal{O}_P(X) \simeq A(X)_{\mathfrak{m}_P}$. Ne segue che

$$K(A(X)) \simeq K(A(X)_{\mathfrak{m}_P}) \simeq K(\mathcal{O}_P(X)) \simeq K(X).$$

Infine, interpretiamo tutti gli anelli in gioco come sottoanelli di $K(X)$. Allora

$$A(X) \subset \mathcal{O}(X) \subset \bigcap_{P\in X} \mathcal{O}_P(X) = \bigcap_{P\in X} A(X)_{\mathfrak{m}_P}.$$

Ma A è un dominio, perciò $A(X) = \bigcap_{P\in X} A(X)_{\mathfrak{m}_P}$. □

Remark 49. *Sia S un anello graduato e $T \subset S$ un sottoinsieme moltiplicativo. Diciamo che T è omogeneo se $T \subset S^h$. Sia dunque $T \subset S$ un sottoinsieme moltiplicativo omogeneo. È facile vedere che $T^{-1}S$ è un anello omogeneo con*

$$(T^{-1}S)_q = \{a/t : a \in S_{q+\deg t}\}.$$

Si osservi che il grado può assumere tutti i valori interi.

Remark 50. *Sia S un anello graduato e $\mathfrak{p}$ un ideale primo omogeneo. Il sottoinsieme $T := S^h \setminus \mathfrak{p}$ è un sottoinsieme moltiplicativo omogeneo. Indichiamo*

$$S^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{p}} := T^{-1}S.$$

La componente omogenea di grado 0 di $S^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{p}}$ è $[S^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{p}}]$ ed è un sottoanello. Inoltre è un anello locale con ideale massimale

$$\mathfrak{m} := (\mathfrak{p} \cdot S^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{p}}) \cap [S^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{p}}].$$

Infatti sia $a/b \in [S^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{p}}]$ ma $a/b \notin \mathfrak{p}\cdot S^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{p}}$. Innanzitutto, $a, b \in S^h$ e $\deg a = \deg b$. Inoltre, $a \notin \mathfrak{p}$ altrimenti sarebbe

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \in \mathfrak{p} \cdot S^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{p}}.$$

Perciò, $a \in T$ e possiamo considerare $b/a \in S^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{p}}$. Chiaramente, $b/a \in [S^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{p}}]$ e, inoltre,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1,$$

cioè a/b è invertibile.

In particolare, se S è un dominio e $\mathfrak{p} = (0)$, allora $\mathfrak{m} = (0)$. Perciò, tutti gli elementi di $[S^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{p}}] \setminus \{0\}$ sono invertibili, cioè $[S^{\mathrm{gr}}_{(0)}]$ è un campo.

Remark 51. *Sia S un anello graduato e $f \in S^h$. Allora, $\{f^n\}_{n\geq 0}$ è un sottoinsieme moltiplicativo omogeneo. Perciò S_f è un anello graduato con*

$$(S_f)_q := \{a/f^n : a \in S_{q+n\deg f} \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Remark 52. *Sia D un dominio graduato e $A \subset B \subset D$ insiemi moltiplicativi omogenei. Sappiamo già che*

$$(A^{-1}B)^{-1}(A^{-1}D) \simeq B^{-1}D.$$

D'altronde $A^{-1}B \subset A^{-1}D$ è un insieme moltiplicativo omogeneo. Sia $[A^{-1}B] = A^{-1}B \cap [A^{-1}D]$ la sua componente omogenea di grado 0. Ovviamente è un insieme moltiplicativo in $[A^{-1}D]$

Proposition 53. *Se A contiene un elemento x di grado 1, allora*

$$[A^{-1}B]^{-1}[A^{-1}D] \simeq [B^{-1}D].$$

Proof. Per ogni n, sia $x_n \in A \cap D$. Consideriamo il morfismo

$$[A^{-1}B]^{-1}[A^{-1}D] \longrightarrow [B^{-1}D]$$

dato da

$$\frac{d/a}{b/a'} \longrightarrow \frac{da'}{ba},$$

in cui $\deg d = \deg a$ e $\deg b = \deg a'$, sicché

$$\deg da' = \deg d + \deg a' = \deg b + \deg a = \deg ba.$$

Consideriamo anche il morfismo

$$[B^{-1}D] \longrightarrow [A^{-1}B]^{-1}[A^{-1}D]$$

dato da

$$\frac{d}{b} \longrightarrow \frac{d/x^n}{b/x^n},$$

in cui $\deg d = \deg b = n$. È facile vedere che i morfismi appena definiti sono l'uno l'inverso dell'altro. □

Corollary 54. *Sia D un dominio graduato, $\mathfrak{p} \subset D$ un ideale primo e $f \in D$ un elemento omogeneo di grado 1 tale che $f \notin \mathfrak{p}$. Allora*

$$[D_f]_{[\mathfrak{p}\cdot D_f]} \simeq [D^{\mathsf{gr}}_{\mathfrak{p}}].$$

Proof. (più avanti dimostreremo una versione più generale di questo corollario: più precisamente faremo il caso che D sia un qualunque anello graduato e f abbia grado qualunque) Si ponga $A := \{f^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ e $B := D^h \smallsetminus \mathfrak{p}$. Allora $A \subset B$ e siamo nelle ipotesi della proposizione precedente. Sicché

$$[A^{-1}B]^{-1}[A^{-1}D] \simeq [B^{-1}D].$$

Ma $A^{-1}D = D_f$, $[A^{-1}B]^{-1} = [D_f] \smallsetminus [\mathfrak{p} \cdot D_f]$ e $B^{-1}D = D^{\mathsf{gr}}_{\mathfrak{p}}$. □

Corollary 55. *Sia D un dominio graduato, e $A \subset D$ un insieme moltiplicativo che contiene un elemento di grado 1. Allora*

$$K(A^{-1}D) \simeq [D^{\mathsf{gr}}_{(0)}].$$

Proof. Si ponga $B = S^h \smallsetminus \{0\}$ e si applichi la proposizione precedente. □

Proposition 56. *Siano $A \subset B$ anelli e $\lambda \in B$. Se $A[\lambda]$ è un A-modulo finitamente generato, allora λ è integrale su A, cioè λ è radice di un polinomio monico a coefficienti in A.*

Proof. Siano $h_1, \ldots, h_m$ generatori dell'A-modulo $A[\lambda]$. Osserviamo preliminarmente che $1 \in A[\lambda]$ e dunque esistono $a_k \in A$, $k = 1, \ldots, m$ tali che

$$1 = \sum_k a_k h_k.$$

Ora, anche $\lambda h_i \in A[\lambda]$ per ogni $i = 1, \ldots, m$. Perciò esiste una matrice $\boldsymbol{M} = (m_{ij}) \in M_m(A)$ tale che, per ogni $i = 1, \ldots, m$,

$$\lambda h_i = \sum_j m_{ij} h_j \Longleftrightarrow \sum_j (m_{ij} - \lambda\delta_{ij}) h_j = 0.$$

Sia $\boldsymbol{C}(\lambda) = (c_{ki}(\lambda)) \in M_m(A)$ la matrice dei complementi algebrici di $\boldsymbol{M} - \lambda\mathbb{I}_n$. Allora

$$\boldsymbol{C}(\lambda) \cdot (\boldsymbol{M} - \lambda\mathbb{I}_n) = \det(\boldsymbol{M} - \lambda\mathbb{I}_n) \cdot \mathbb{I}_n = P_{\boldsymbol{M}}(\lambda) \cdot \mathbb{I}_n,$$

da cui

$$0 = \sum_{i,j} c_{ki}(\lambda)(m_{ij} - \lambda\delta_{ij}) h_j = P_{\boldsymbol{M}}(\lambda) h_k.$$

per ogni k. Infine

$$P_{\boldsymbol{M}}(\lambda) = P_{\boldsymbol{M}}(\lambda)\cdot 1 = P_{\boldsymbol{M}}(\lambda)\sum_k a_k h_k = \sum_k a_k P_{\boldsymbol{M}}(\lambda) h_k = 0.$$

Ma $P_{\boldsymbol{M}}$ è un polinomio monico. □

Theorem 57. *Sia $X \subset \boldsymbol{P}^n$ una varietà proiettiva. Allora*

(1) $\mathcal{O}(X) \simeq k$,
(2) $\mathcal{O}_P(X) \simeq [S(X)^{\mathrm{gr}}_{\bar{\mathfrak{m}}_P}]$, *in cui $\bar{\mathfrak{m}}_P \subset S(X)$ è l'ideale (omogeneo) generato dai polinomi omogenei che si annullano in $P \in X$,*
(3) $K(X) \simeq [S(X)^{\mathrm{gr}}_{(0)}]$.

Proof. Dimostriamo la 2. Sia $\{U_i\}_{i=1}^n$ il ricoprimento affine canonico di P^n, e $X_i = X \cap U_i$. U_i è isomorfo ad $\boldsymbol{A}^n$ tramite $\varphi_i : U_i \longrightarrow \boldsymbol{A}^n$ e perciò X_i si può rivedere come una varietà affine identificandola con la sua immagine mediante φ_i. Ricordiamo anche che esiste un isomorfismo canonico

$$\Psi_i : A(X_i)[x_i, x_i^{-1}] \longrightarrow S(X)_{\overline{x_i}}$$

definito da

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}} G_q(y_1,\dots,y_n)x_i^q \longmapsto \sum_{q\in\mathbb{Z}} G_q(x_1/x_i,\dots,x_n/x_i)x_i^q.$$

Si osservi che $S(X)_{\overline{x_i}}$ è un anello graduato e Ψ_i mappa (isomorficamente) $A(X_i) \subset A(X_i)[x_i, x_i^{-1}]$ nella sua componente di grado 0, $[S(X)_{\overline{x_i}}]$. A titolo di esempio, osserviamo che la restrizione

$$\Psi_0 : A(X_0) \longrightarrow [S(X)_{\overline{x_0}}]$$

manda $G(y_1,\dots,y_n)$ in $G(x_1/x_0,\dots,x_n/x_0)$.

Ora, sia $P \in X$. Senza ledere la generalità della dimostrazione, assumiamo $P \in X_0$. Sia $\mathfrak{m}_P \subset A(X_0)$ l'ideale massimale di P. Osserviamo subito che

$$\mathcal{O}_P(X) \simeq \mathcal{O}_P(X_0) \simeq A(X_0)_{\mathfrak{m}_P}.$$

perché $X_0 \subset X$ è aperto. Inoltre

$$\Psi_0(\mathfrak{m}_P) = [\bar{\mathfrak{m}}_P \cdot S(X)_{\overline{x_0}}]$$

infatti se $G = G(y_1,\dots,y_n) \in A(X_0)$ allora

$$\Psi_0(G) = \frac{x_0^{\deg G} G(x_1/x_0,\dots,x_n/x_0)}{x_0^{\deg G}} = \beta(G)(x_1,\dots,x_n)\cdot\frac{1}{x_0^{\deg G}}.$$

Se, ora $G(P) = 0$ anche $\beta(G)(P) = 0$ (qui identifichiamo $P \in X_0$ con $\varphi_0(P)$), inoltre $\beta(G)$ è omogeneo di grado $\deg G$. Perciò $\beta(G) \in \bar{\mathfrak{m}}_P$. Concludiamo che $A(X_0)_{\mathfrak{m}_P}$ è isomorfo alla localizzazione di $[S(X)_{\overline{x_0}}]$ all'ideale $[\bar{\mathfrak{m}}_P \cdot S(X)_{\overline{x_0}}]$. In virtù del Corollario 54, tale localizzazione è a sua volta isomorfa a $[S(X)^{\mathrm{gr}}_{\bar{\mathfrak{m}}_P}]$. Ne deduciamo che

$$\mathcal{O}_P(X) \simeq [S(X)^{\mathrm{gr}}_{\bar{\mathfrak{m}}_P}].$$

Per dimostrare il punto 3, sia $P \in X$. L'insieme moltiplicativo $S(X)^h \setminus \bar{\mathfrak{m}}_P$ contiene un elemento di grado 1. Infatti se $P \in X_i$, allora $\overline{x_i} \in S(X)^h \setminus \bar{\mathfrak{m}}_P$. Allora, in virtù del Corollario 55, si ha

$$[S(X)^{\mathrm{gr}}_{(0)}] \simeq K([S(X)^{\mathrm{gr}}_{\bar{\mathfrak{m}}_P}]) \simeq K(\mathcal{O}_P(X)) \simeq K(X).$$

Infine, dimostriamo il punto 1. Interpretiamo gli anelli $\mathcal{O}(X)$ e $S(X)$ come sottoanelli di $\mathcal{K} := K(S(X))$. Questo è possibile perché $\mathcal{O}(X) \subset K(X)$. A sua volta

$$K(X) \simeq [S(X)^{\mathrm{gr}}_{(0)}] \subset S(X)^{\mathrm{gr}}_{(0)} \subset S(X)_{(0)} = \mathcal{K},$$

infatti $S^h \smallsetminus (0) \subset S \smallsetminus (0)$. Guardando con attenzione tutti gli isomorfismi in gioco, si scopre che l'inclusione

$$i : \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{K}$$

è definita come segue. Sia $f \in \mathcal{O}(X)$ e $U \subset X$ un aperto tale che $f = F/G$ in U con F, G polinomi omogenei dello stesso grado. Allora

$$i(f) = \frac{F + I_{\mathbf{P}}(X)}{G + I_{\mathbf{P}}(X)}.$$

Anche gli anelli $\mathcal{O}(X_i)$ si possono rivedere come sottoanelli di $\mathcal{K}$. Infatti,

$$\mathcal{O}(X_i) \simeq A(X_i) \simeq [S(X)_{\overline{x_i}}] \subset S(X)_{\overline{x_i}} \subset \mathcal{K}.$$

Inoltre $\mathcal{O}(X) \subset \mathcal{O}(X_i) \simeq [S(X)_{\overline{x_i}}]$ per ogni i. Ora, sia $f \in \mathcal{O}(X)$, allora $f \in [S(X)_{\overline{x_i}}]$ per ogni i. Guardando all'isomorfismo $\mathcal{O}(X_i) \simeq [S(X)_{\overline{x_i}}]$ ne deduciamo che $f \in \mathcal{K}$ è della forma $g_i/x_i^{N_i}$ con $g_i \in S(X)$ "polinomio" omogeneo di grado N_i, cioè

$$x_i^{N_i} f \in S(X)_{N_i}$$

Poniamo $N = N_0 + \cdots + N_n$. Allora il k-spazio vettoriale $S(X)_N$ è generato da monomi del tipo $x_0^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ con $i_1 + \cdots + i_n = N$. Ne consegue che almeno uno degli i_j è maggiore o uguale di N_j (se ogni i_j fosse minore di N_j, la somma degli i_j sarebbe minore di N). Perciò

$$x_0^{i_1} \cdots x_n^{i_n} f \in S(X)_N.$$

Infatti, senza ledere la generalità della dimostrazione, assumiamo $i_n \geq N$. Allora

$$x_n^{i_n} f = x_n^{i_n - N_n} x_n^{N_n} f \in x_n^{i_n - N_n} \cdot S(X)_{N_i} \subset S(X)_{i_n},$$

da cui

$$x_0^{i_1} \cdots x_{n-1}^{i_{n-1}} x_n^{i_n} f \in S(X)_{i_1} \cdot \cdots \cdot S(X)_{i_{n-1}} \cdot S(X)_{i_n} \subset S(X)_N.$$

Perciò si ha anche

$$S(X)_N \cdot f \subset S(X)_N,$$

da cui

$$S(X)_N \cdot f^q \subset S(X)_N \cdot f \cdot f^{q-1} \subset S(X)_N \cdot f^{q-1}.$$

Il principio di induzione garantisce allora

$$S(X)_N \cdot f^q \subset S(X)_N \quad \text{per ogni } q \in \mathbb{N}.$$

In particolare

$$x_0^N \cdot f^q \in S(X)_N \subset S(X) \quad \text{per ogni } q \in \mathbb{N},$$

e

$$f^q \in x_0^{-N} \cdot S(X) \quad \text{per ogni } q \in \mathbb{N}.$$

Siano $F_0, \ldots, F_k \in S(X)$, allora

$$F_0 + F_1 f + F_2 f^2 + \cdots + F_k f^k \in x_0^{-N} \cdot S(X),$$

cioè $S(X)[f] \subset x_0^{-N} \cdot S(X) \subset \mathcal{K}$. Ora $x_0^{-N} \cdot S(X)$ è un $S(X)$ modulo finitamente generato (ha un unico generatore: x_0^{-N}). Giacché $S(X)$ è un anello Noetheriano, anche il sottomodulo $S(X)[f]$ è finitamente generato. Allora f è integrale su $S(X) \subset \mathcal{K}$ in virtù della proposizione 56. Cioè esiste $m \in \mathbb{N}$ ed esistono $F_0, \ldots, F_{m-1} \in S(X)$ tali che

$$F_0 + F_1 f + \cdots + F_{m-1} f^{m-1} + f^m = 0. \tag{9}$$

Ricordiamo che f ha grado zero (è essenzialmente rapporto di polinomi dello stesso grado). La componente omogenea di grado 0 dell'identità (9) è perciò

$$F_0(0) + F_1(0) f + \cdots + F_{m-1}(0) f^{m-1} + f^m = 0,$$

Ora, per ogni i, $F_i(0) \in k$ che è algebricamente chiuso. Ne deduciamo $f \in k$. □

0.8. **Prodotto di Varietà Affini.**

Proposition 58. *Siano A e B k-algebre integre e sia A finitamente generata. Allora $A \otimes_k B$ è una k-algebra integra.*

Proof. A è l'anello delle coordinate affini di una varietà affine X. Sia $\theta \in A \otimes_k B$. θ è sempre della forma $\theta = \sum_i a_i \otimes b_i$, $a_i \in A$, $b_i \in B$. Inoltre i b_i si possono sempre scegliere indipendenti su k. Infatti se $b_\ell = \sum_{i \neq \ell} k_i b_i$, allora

$$\begin{aligned}
\theta &= \sum_{i \neq \ell} a_i \otimes b_i + a_\ell \otimes b_\ell \\
&= \sum_{i \neq \ell} a_i \otimes b_i + a_\ell \otimes \sum_{i \neq \ell} k_i b_i \\
&= \sum_{i \neq \ell} a_i \otimes b_i + \sum_{i \neq \ell} k_i a_\ell \otimes b_i \\
&= \sum_{i \neq \ell} (a_i + k_i a_\ell) \otimes b_i.
\end{aligned}$$

Sia $P \in X$. La mappa bilineare

$$A \times B \ni (a, b) \longmapsto a(P) b \in B$$

determina un morfismo di k-algebre

$$\psi_P : A \otimes_k B \longrightarrow B$$

tale che

$$\psi_P(\theta) = \sum_i a_i(P) b_i.$$

In particolare $\psi_P(\theta) = 0$ sse $a_i(P) = 0$ per ogni i. Ora siano $\theta_1, \theta_2 \in A \otimes_k B$ tali che $\theta_1 \theta_2 = 0$. $\theta_1 = \sum_i a_{1i} \otimes b_{1i}$ con i b_{1i} indipendenti su k. Similmente, $\theta_2 = \sum_j a_{2j} \otimes b_{2j}$ con i b_{2j} indipendenti su k. Allora per ogni $P \in X$,

$$0 = \psi_P(\theta_1 \theta_2) = \psi_P(\theta_1) \psi_P(\theta_2),$$

da cui $\psi_P(\theta_1) = 0$ (e quindi $a_{1i}(P) = 0$ per ogni i) o $\psi_P(\theta_2) = 0$ (e quindi $a_{2j}(P) = 0$ per ogni j). Segue dall'arbitrarietà di P che

$$X = Z(\ldots, a_{1i}, \ldots) \cup Z(\ldots, a_{2j}, \ldots),$$

ma X è irriducibile, perciò $X = Z(\ldots, a_{1i}, \ldots)$ (e, dunque, $a_{1i} = 0$ per ogni i, e, dunque, $\theta_1 = 0$) o $X = Z(\ldots, a_{2j}, \ldots)$ (e, dunque, $a_{2i} = 0$ per ogni i, e, dunque, $\theta_2 = 0$). □

Siano $X \subset \mathbf{A}^n$ e $Y \subset \mathbf{A}^m$ varietà affini. Consideriamo $X \times Y \subset \mathbf{A}^n \times \mathbf{A}^m = \mathbf{A}^{n+m}$.

Proposition 59. *$X \times Y$ è un insieme algebrico in $\mathbf{A}^{n+m}$.*

Proof. Siano $p_1 : \boldsymbol{A}^n \times \boldsymbol{A}^m \longrightarrow \boldsymbol{A}^n$ e $p_2 : \boldsymbol{A}^n \times \boldsymbol{A}^m \longrightarrow \boldsymbol{A}^m$ le ovvie proiezioni. Abbiamo già dimostrato che si tratta di morfismi. In particolare sono funzioni continue. Allora

$$X \times Y = p_1^{-1}(X) \cap p_2^{-1}(Y) \tag{10}$$

è chiuso perché intersezione di due chiusi. □

Proposition 60. *$A(X \times Y) \simeq A(X) \otimes_k A(Y)$.*

Proof. Ricordiamo l'isomorfismo

$$p^* : k[x_1, \ldots, x_n] \otimes_k k[y_1, \ldots, y_m] \longrightarrow k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$$

dato da

$$p^* \sum_i f_i \otimes g_i := \sum_i p_1^*(f_i) p_2^*(g_i)$$

$A(X) \otimes_k A(Y)$ è il quoziente di $k[x_1, \ldots, x_n] \otimes_k k[y_1, \ldots, y_m]$ su

$$I(X) \otimes k[y_1, \ldots, y_m] + k[x_1, \ldots, x_n] \otimes I(Y). \tag{11}$$

Giacché $A(X) \otimes_k A(Y)$ è un dominio, tale ideale è primo, in particolare radicale. Chiaramente p^* identifica l'ideale (11) con l'ideale

$$I(p_1^{-1}(X)) + I(p_2^{-1}(Y))$$

che, perciò, è pure primo (e radicale). Ora $I(p_1^{-1}(X)) + I(p_2^{-1}(Y)) = I(X \times Y)$. Infatti

$$\begin{aligned} X \times Y &= p_1^{-1}(X) \cap p_2^{-1}(Y) \\ &= ZI(p_1^{-1}(X)) \cap ZI(p_2^{-1}(Y)) \\ &= Z(I(p_1^{-1}(X)) \cup I(p_2^{-1}(Y))) \\ &= Z(I(p_1^{-1}(X)) + I(p_2^{-1}(Y)). \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} I(X \times Y) &= IZ(I(p_1^{-1}(X)) + I(p_2^{-1}(Y))) \\ &= \sqrt{I(p_1^{-1}(X)) + I(p_2^{-1}(Y))} \\ &= I(p_1^{-1}(X)) + I(p_2^{-1}(Y)). \end{aligned}$$

In particolare p^* identifica $A(X) \otimes_k A(Y)$ con

$$k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]/I(X \times Y) = A(X \times Y).$$

□

Corollary 61. *$X \times Y$ è una varietà affine.*

Proof. Infatti è un chiuso ed è irriducibile perché il suo anello delle coordinate affini è un dominio. □

Remark 62. *In generale, $X \times Y$ non ha la topologia del prodotto. Per esempio se $X = Y = \boldsymbol{A}^1$. Allora $X \times Y = \boldsymbol{A}^2$, ma i chiusi della topologia prodotto sono sottoinsiemi finiti (la topologia prodotto è quella generata dai prodotti di aperti).*

Proposition 63. *$(X \times Y, p_1, p_2)$ è un prodotto nella categoria delle varietà. Cioè $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$ e $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ sono morfismi e, inoltre, vale la seguente proprietà universale. Se Z è una varietà e $F_1 : Z \longrightarrow X$, $F_2 : Z \longrightarrow Y$ sono morfismi, allora esiste un unico morfismo $F : Z \longrightarrow X \times Y$ che rende commutativo il diagramma*

$$\begin{tikzcd}
& X \times Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X & & Y \\
& Z \arrow[ul, "F_1"] \arrow[ur, "F_2"'] \arrow[uu, dotted, "F"] &
\end{tikzcd} \tag{12}$$

Proof. $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$ e $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ sono morfismi perché restrizioni dei morfismi $p_1 : \boldsymbol{A}^n \times \boldsymbol{A}^m \longrightarrow \boldsymbol{A}^n$ e $p_2 : \boldsymbol{A}^n \times \boldsymbol{A}^m \longrightarrow \boldsymbol{A}^m$. Inoltre siano Z, $F_1 : Z \longrightarrow X$, $F_2 : Z \longrightarrow Y$ come nelle ipotesi. Poniamo

$$F : Z \ni z \longmapsto F(z) := (F_1(z), F_2(z)) \in X \times Y.$$

F è un morfismo perché lo è componente a componente (perché gli F_i sono morfismi). Inoltre rende chiaramente commutativo il diagramma. D'altronde se $G : Z \longrightarrow X \times Y$ è un altro morfismo con la stessa proprietà deve essere

$$G(z) = (F_1(z), F_2(z)) = F(z)$$

per ogni $z \in Z$, cioè $F = G$. □

0.9. **Prodotto di Varietà Proiettive.** Siano $X \subset \boldsymbol{P}^n$ e $Y \subset \boldsymbol{P}^m$ varietà proiettive. Il prodotto $\boldsymbol{P}^n \times \boldsymbol{P}^m$ si può rivedere come varietà proiettiva nel modo che segue. Sia $V = M_{n+1,m+1}(k)$. $\boldsymbol{P}(V)$ si identifica con $\boldsymbol{P}^N$ con

$$N = (n+1)(m+1) - 1 = nm + n + m.$$

Indichiamo con $[z_{ij}]$, $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, m$, le coordinate omogenee di un generico punto di $\boldsymbol{P}(V) = \boldsymbol{P}^N$. Consideriamo la mappa

$$\sigma : \boldsymbol{P}^n \times \boldsymbol{P}^m \ni ([x_0, \ldots, x_n], [y_0, \ldots, y_m]) \longmapsto [x_i y_j] \in \boldsymbol{P}^N.$$

σ è chiaramente ben posta. Inoltre è iniettiva, infatti sia $[x_i y_j] = [x'_i y'_j]$. Ciò vuol dire che

$$x_i y_j = \lambda x'_i y'_j$$

per ogni i, j. Sia j tale che $y_j \neq 0$ (tale j esiste necessariamente) allora

$$x_i = (\lambda y'_j y_j^{-1}) x_i$$

per ogni i, cioè $[x_0, \ldots, x_n] = [x'_0, \ldots, x'_n]$. Similmente $[y_0, \ldots, y_m] = [y'_0, \ldots, y'_m]$. Vogliamo mostrare che l'immagine di σ è una sottovarietà proiettiva di $\boldsymbol{P}^N$.

Lemma 64. *Sia $[z_{ij}] \in \boldsymbol{P}^N$, $[z_{ij}] \in \operatorname{im} \sigma$ sse $\operatorname{rank}(z_{ij}) = 1$.*

Proof. Osserviamo preliminarmente che $\operatorname{rank}(z_{ij}) > 0$ per ogni $[z_{ij}] \in \boldsymbol{P}^N$. Inoltre la condizione $\operatorname{rank}(z_{ij}) = 1$ non dipende dalla scelta del rappresentante (z_{ij}) in $[z_{ij}]$. Sia $z_{ij} = x_i y_j$ con $x_\ell \neq 0$. Allora ogni riga della matrice (z_{ij}) dipende linearmente dalla ℓesima. Infatti

$$z_{ij} = x_i y_j = x_i x_\ell^{-1} x_\ell y_j = x_i x_\ell^{-1} z_{\ell j}$$

e dunque $\mathsf{rank}\,(z_{ij}) = 1$. Viceversa, sia $\mathsf{rank}\,(z_{ij}) = 1$ e sia diversa da zero la riga ℓesima di (z_{ij}). Allora ogni altra riga dipende dalla ℓesima, cioè esistono x_i tali che

$$z_{ij} = x_i z_{\ell j}$$

per ogni i e j. Posto, $y_j = z_{\ell j}$, segue che

$$z_{ij} = x_i y_j.$$

□

Corollary 65. *Sia* $[z_{ij}] \in \boldsymbol{P}^N$, $[z_{ij}] \in \mathsf{im}\,\sigma$ *sse*

$$z_{ij}z_{hk} - z_{ik}z_{hj} = 0 \tag{13}$$

per ogni i, j, h, k.

Proof. Infatti le espressioni sono i minori di ordine 2 della matrice (z_{ij}). □

Si noti che le espressioni (13) sono polinomi omogenei nelle indeterminate z_{ij}. Perciò il corollario precedente si può tradurre dicendo che

$$\mathsf{im}\,\sigma = Z_{\boldsymbol{P}}(\{z_{ij}z_{hk} - z_{ik}z_{hj}\}).$$

In particolare $\mathsf{im}\,\sigma$ è un insieme algebrico proiettivo. Per dimostrare che è irriducibile osserviamo che vale la seguente

Proposition 66. $I_{\boldsymbol{P}}(\mathsf{im}\,\sigma)$ *è il nucleo dell'unico omomorfismo*

$$\sigma^* : k[z_{ij}] \longrightarrow k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$$

tale che

$$\sigma^*(z_{ij}) := x_i y_j \quad \textit{per ogni } i, j.$$

Proof. Innanzitutto osserviamo che $\mathsf{ker}\,\sigma^*$ è un ideale omogeneo perché σ^* manda polinomi omogenei di grado q in polinomi omogenei di grado $2q$. Ora, sia $f = f(z_{ij}) \in (\mathsf{ker}\,\sigma^*)_q$ e $P = [\bar{z}_{ij}] \in \mathsf{im}\,\sigma$. Allora $\bar{z}_{ij} = \bar{x}_i\bar{y}_j$ con $P_1 = [\bar{x}_i] \in \boldsymbol{P}^n$, $P_2 = [\bar{y}_j] \in \boldsymbol{P}^m$, e

$$f(P) = f(\bar{z}_{ij}) = f(\bar{x}_i\bar{y}_j) = (\sigma^* f)(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = 0.$$

Dunque $\mathsf{ker}\,\sigma^* \subset I_{\boldsymbol{P}}(\mathsf{im}\,\sigma)$. Viceversa, sia $f \in I_{\boldsymbol{P}}(\mathsf{im}\,\sigma)$ un polinomio omogeneo e $[\bar{x}_i], [\bar{y}_j] \in \boldsymbol{P}^n \times \boldsymbol{P}^m$. Allora

$$(\sigma^* f)(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = f(\bar{x}_i\bar{y}_j) = f(\sigma([\bar{x}_i], [\bar{y}_j])) = 0.$$

Perciò, $\sigma^* f$ si annulla sui punti di

$$U = (\boldsymbol{A}^{n+1} \times \boldsymbol{A}^{m+1}) \smallsetminus ((\{0\} \times \boldsymbol{A}^{m+1}) \cup (\boldsymbol{A}^{n+1} \times \{0\})).$$

Ma U è un aperto e dunque $\sigma^* f = 0$. □

La precedente proposizione implica che

$$k[z_{ij}]/I_{\boldsymbol{P}}(\mathsf{im}\,\sigma) \subset k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$$

ed è, dunque, un dominio. Perciò $I_{\boldsymbol{P}}(\mathsf{im}\,\sigma)$ è un ideale primo e $\mathsf{im}\,\sigma$ è irriducibile.

σ è detta l'*immersione di Segré*.

Remark 67. *Siano X e Y varietà. Una mappa $F : X \longrightarrow Y$ è un morfismo sse lo è localmente e cioè, X e ricoperto di aperti U con la proprietà che $F|_U : U \longrightarrow Y$ è un morfismo per ogni U e V. Infatti, sia R il ricoprimento di X in questione. F è continua per il lemma di incollamento. Sia cioè $V \subset Y$ un aperto. Allora*

$$\begin{aligned} F^{-1}(V) &= F^{-1}(V) \cap \bigcup_{U \in R} U \\ &= \bigcup_{U \in R} F^{-1}(V) \cap U \\ &= \bigcup_{U \in R} F|_U^{-1}(V) \end{aligned}$$

Ora $F|_U^{-1}(V)$ è aperto in U (e quindi in X) per ogni U. Ora sia $f : V \longrightarrow k$ una funzione regolare localmente definita in un aperto V di Y. Si ha

$$F^* f : F^{-1}(V) \longrightarrow k$$

inoltre la restrizione

$$F^* f|_{F|_U^{-1}(V)} = F|_U^* f$$

ed è perciò regolare. Giacché gli U ricoprono X, anche $F^* f$ è regolare.

Theorem 68. *Siano $X \subset \boldsymbol{P}^n$ e $Y \subset \boldsymbol{P}^m$ varietà proiettive. Allora $\sigma(X \times Y) \subset \boldsymbol{P}^N$ è una varietà proiettiva.*

Proof. Siano $P \in X$ e $Q \in Y$. Le mappe

$$\begin{aligned} p_1 &: \operatorname{im}\sigma \ni \sigma([x_i],[y_j]) \longmapsto [x_i] \in \boldsymbol{P}^n \\ p_2 &: \operatorname{im}\sigma \ni \sigma([x_i],[y_j]) \longmapsto [y_j] \in \boldsymbol{P}^m \\ \varphi_P &: \boldsymbol{P}^m \ni Q' \longmapsto \sigma(P, Q') \in \operatorname{im}\sigma \\ \varphi_Q &: \boldsymbol{P}^n \ni P' \longmapsto \sigma(P', Q) \in \operatorname{im}\sigma \end{aligned}$$

sono morfismi. Per esempio, consideriamo p_1 e la sua restrizione a $\Sigma_{00} := \{[z_{ij}] \in \operatorname{im}\sigma : z_{00} \neq 0\}$. Σ_{00} è una varietà affine e p_1 la mappa in U_0 che è pure affine. È facile vedere che $p_1 : \Sigma_{00} \longrightarrow U_0$ ha componenti regolari e perciò è un morfismo. Ragionando analogamente con tutti gli aperti del ricoprimento affine di $\operatorname{im}\sigma$ e applicando il lemma di incollamento si trova che p_1 è regolare. Analogamente le altre mappe. Infine φ_P e φ_Q hanno immagini chiuse e irriducibili e sono isomorfismi sulle rispettive immagini (dimostrarlo per esercizio).

In particolare

$$\sigma(X \times Y) = p_1^{-1}(X) \cap p_2^{-1}(Y)$$

è chiuso in $\operatorname{im}\sigma$. Per dimostrare che $\sigma(X \times Y)$ è irriducibile ragioniamo così: sia $Q \in Y$.

$$\sigma(X \times \{Q\}) = \varphi_Q(X) \subset \sigma(X \times Y)$$

è un chiuso irriducibile omeomorfo a X. Sia $\{Z_1, Z_2\}$ un ricoprimento chiuso di $\sigma(X \times Y) \subset \boldsymbol{P}^n \times \boldsymbol{P}^m$. Poniamo

$$Y_i := \{Q \in Y : \sigma(X \times \{Q\}) \subset Z_i\}.$$

$\{Y_1, Y_2\}$ è un ricoprimento chiuso di Y. Infatti, $\sigma(X\times\{Q\})$ è irriducibile per ogni Q da cui $\sigma(X\times\{Q\}) \subset Z_1$ (cioè $Q \in Y_1$) o $\sigma(X \times \{Q\}) \subset Z_2$ (coè $Q \in Y_2$). Inoltre Y_i è chiuso. Infatti

$$\begin{aligned} Y_i &= \{Q \in Y : \sigma(P, Q) \in Z_i \text{ per ogni } P \in X\} \\ &= \{Q \in Y : \varphi_P(Q) \in Z_i \text{ per ogni } P \in X\} \\ &= Y \cap \bigcap_{P\in X} \varphi_P^{-1}(Z_i), \end{aligned}$$

Ma $\bigcap_{P\in X} \varphi_P^{-1}(Z_i)$ è chiuso, perché φ_P è continua. Concludiamo che $Y \subset Y_1$ (e allora $\sigma(X \times Y) \subset Z_1$) o $Y \subset Y_2$ (e allora $\sigma(X \times Y) \subset Z_2$). □

0.10. **Mappe Razionali.**

Remark 69. *Sia* $\Delta \subset \boldsymbol{P}^n \times \boldsymbol{P}^n \xrightarrow{\sigma} \boldsymbol{P}^{n^2+2n}$ *la diagonale, cioè*

$$\Delta := \{(P, P) \in \boldsymbol{P}^n \times \boldsymbol{P}^n : P \in \boldsymbol{P}^n\}.$$

Δ *è una sottovarietà chiusa di* $\boldsymbol{P}^n \times \boldsymbol{P}^n$ *(e quindi di* $\boldsymbol{P}^{n^2+2n}$*) di equazione*

$$\begin{cases} z_{ij}z_{hk} - z_{ik}z_{hj} = 0 \\ z_{ij} - z_{ji} = 0 \end{cases},$$

Osserviamo, preliminarmente, che il sistema in questione è omogeneo e, correttamente, definisce un sottoinsieme algebrico proiettivo (di $\boldsymbol{P}^n \times \boldsymbol{P}^n$*) in* $\boldsymbol{P}^{n^2+2n}$*. Ora è chiaro che i polinomi omogenei* $z_{ij} - z_{ji}$ *si annullano sui punti di* Δ*. Viceversa sia* $[z_{ij}] \in \boldsymbol{P}^n \times \boldsymbol{P}^n$ *tale che* $z_{ij} - z_{ji} = 0$*. Allora,* $z_{ij} = x_i y_j$*, per qualche* $[x_i], [y_j] \in \boldsymbol{P}^n$ *e*

$$x_i y_j = x_j y_i$$

per ogni i, j*. sia* j *tale che* $y_j \neq 0$*. Si ha*

$$x_i = (y_j^{-1} x_j) y_i,$$

da cui $[x_i] = [y_j]$*, cioè* $[z_{ij}] \in \Delta$*.*

Remark 70. *Sia* $F : X \longrightarrow Y$ *un'applicazione continua tra spazi topologici e* $A \subset X$ *un sottoinsieme. Allora* $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$*. Infatti, sia* $C \subset Y$ *un chiuso che contiene* $F(A)$*. Allora* $F^{-1}(C) \subset X$ *è un chiuso che contiene* A *e, quindi* $\overline{A}$*. Quindi* $F(\overline{A}) \subset C$*.*

Remark 71. *Sia* $Y \subset \boldsymbol{A}^n$ *una varietà quasi-affine. Allora* $\overline{Y} \smallsetminus Y$ *è chiuso in* $\boldsymbol{A}^n$*. Infatti,* $\overline{Y}$ *è chiuso in* $\boldsymbol{A}^n$ *e* $Y \subset \overline{Y}$ *è un aperto in* $\overline{Y}$*. Dunque* $\overline{Y} \smallsetminus Y$ *è chiuso in* $\overline{Y}$ *e perciò in* $\boldsymbol{A}^n$*.*

Remark 72. *Sia* X *una varietà e* $Y \subset X$ *una sottovarietà aperta. Allora* $K(Y) = K(X)$*. Infatti, la restrizione* $K(X) \longrightarrow K(Y)$ *è ovviamente biettiva.*

Remark 73. *Siano* X *e* Y *insiemi e* $F : U' \longrightarrow Y$ *e* $G : V' \longrightarrow X$*, con* $U' \subset X$ *e* $V' \subset Y$ *sottoinsiemi, funzioni tali che* $F \circ G : G^{-1}(U') \longrightarrow Y$ *e* $G \circ F : F^{-1}(V') \longrightarrow X$ *coincidono con le inclusioni di* $G^{-1}(U')$ *in* Y *e di* $F^{-1}(V')$ *in* X *rispettivamente. Posto,* $U := F^{-1}(G^{-1}(U')) \subset X$ *e* $V := G^{-1}(F^{-1}(V'))$*,* $F : U \longrightarrow V$ *è una ben definita biezione con inversa* $G : V \longrightarrow U$*. Per mostrarlo è sufficiente mostrare che* $F(U) \subset V$*. Perciò sia* $P \in U$*. Dobbiamo mostrare che* $F(P) \in V$*. In altre parole che* $F(G(F(P))) \in V$*. Ora* $F(G(F(P))) = F(P)$ *perchè* $F \circ G$ *è l'inclusione del suo dominio in* Y*. Ma* $P \in U$ *e, dunque,* $F(P) \in G^{-1}(U) \subset V$*.*

0.11. **Schemi.**

Remark 74. *Sia $F : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli (commutativi, con unità) e $\mathfrak{p} \subset B$ un ideale primo. $F^{-1}(\mathfrak{p})$ è un ideale primo. Infatti, è un ideale perché controimmagine di un ideale. Inoltre $1_A \notin F^{-1}(\mathfrak{p})$, altrimenti si avrebbe $1_B = F(1_A) \in \mathfrak{p}$. Infine se $a, b \in A$ sono tali che $ab \in F^{-1}(\mathfrak{p})$, allora $F(ab) = F(a)F(b) \in \mathfrak{p}$ da cui $F(a) \in \mathfrak{p}$ (cioè $a \in F^{-1}(\mathfrak{p})$) o $F(b) \in \mathfrak{p}$ (cioè $b \in F^{-1}(\mathfrak{p})$).*

Proposition 75. *Sia A un anello (commutativo, con unità), $\mathfrak{a} \subset A$ un ideale e*

$$V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \subset A \text{ ideale primo tale che } \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\}.$$

Allora,

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}.$$

In altre parole, il radicale di un ideale $\mathfrak{a}$ è l'intersezione di tutti gli ideali primi che contengono $\mathfrak{a}$.

Proof. Sia $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. Allora $\sqrt{\mathfrak{a}} \subset \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. Perciò,

$$\sqrt{\mathfrak{a}} \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}.$$

Per dimostrare l'altra inclusione assumiamo, innanzitutto, $\mathfrak{a} = (0)$. Sia $f \in A \setminus \sqrt{(0)}$, cioé f non è nilpotente. Osserviamo preliminarmente che $V((0))$ consiste di tutti gli ideali primi. Consideriamo l'insieme

$$\mathcal{A} := \{I \subset A \text{ ideale tale che } f^n \notin I \text{ per alcun } n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Ovviamente $(0) \in \mathcal{A}$ che, perciò, è non vuoto. Allora, per il lemma di Zorn, $\mathcal{A}$ ha un elemento massimale I_0. I_0 è un ideale primo. Infatti, $1 = f^0 \notin I_0$. Inoltre siano $a, b \in A \setminus I_0$. Allora $I_0 + (a)$ e $I_0 + (b)$ sono distinti da I_0 e giacché lo contengono non possono essere in $\mathcal{A}$. Dunque esistono $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $f^n \in I_0 + (a)$ e $f^m \in I_0 + (b)$, da cui

$$f^{n+m} \in (I_0 + (a)) \cdot (I_0 + (b)) \subset I_0 + (ab).$$

Non può essere $I_0 + (ab) \subset I_0$, altrimenti $f^{n+m} \in I_0$ e I_0 non sarebbe in $\mathcal{A}$. Perciò $I_0 + (ab)$ contiene I_0 propriamente, cioè $ab \notin I_0$. Quindi I_0 è primo.

Giacché $f \notin I_0$ ma I_0 è primo, segue che

$$f \notin \bigcap\nolimits_{\mathfrak{p} \in V((0))} \mathfrak{p}.$$

Abbiamo così dimostrato che

$$A \setminus \sqrt{(0)} \subset A \setminus \bigcap\nolimits_{\mathfrak{p} \in V((0))} \mathfrak{p},$$

cioè

$$\bigcap\nolimits_{\mathfrak{p} \in V((0))} \mathfrak{p} \subset \sqrt{(0)}.$$

Consideriamo ora il caso $\mathfrak{a}$ generico. $\mathfrak{a}$ corrisponde all'ideale (0) del quoziente $A/\mathfrak{a}$ e gli elementi di $V(\mathfrak{a})$ corrispondono agli ideali primi del quoziente. Dunque, detta $\pi : A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$ la proiezione

$$\begin{aligned} \bigcap\nolimits_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} &= \bigcap\nolimits_{\mathfrak{p}' \in V((0))} \pi^{-1}(\mathfrak{p}') \\ &= \pi^{-1} \bigcap\nolimits_{\mathfrak{p}' \in V((0))} \mathfrak{p}' \\ &\subset \pi^{-1}(\sqrt{(0)}) \\ &= \sqrt{\mathfrak{a}}, \end{aligned}$$

in cui l'ultima uguaglianza è ovvia. □

Sia **Ring** la categoria degli anelli (con gli omomorfismi di anelli) e $\mathbf{Ringed}_{\mathsf{loc}}$ la categoria degli spazi localmente anellati (con i morfismi di spazi localmente anellati).

Theorem 76. *Esiste un funtore canonico, pienamente fedele,* $\mathfrak{g} : \mathbf{Ring} \longrightarrow \mathbf{Ringed}_{\mathsf{loc}}$.

Proof. Sia A un anello. Poniamo $\mathfrak{g}(A) := (\mathsf{Spec}\, A, \mathcal{O}_A)$, in cui $\mathsf{Spec}\, A$ è lo spettro di A e $\mathcal{O}_A$ è il relativo fascio di struttura. Come sappiamo, $(\mathsf{Spec}\, A, \mathcal{O}_A)$ è uno spazio localmente anellato. Ora, sia $\varphi : A \longrightarrow B$ un morfismo di anelli. Vogliamo definire un morfismo $\mathfrak{g}(\varphi) : (\mathsf{Spec}\, A, \mathcal{O}_A) \longrightarrow (\mathsf{Spec}\, B, \mathcal{O}_B)$ di spazi localmente anellati in modo che $\mathfrak{g}$ abbia le dovute proprietà funtoriali. Se $\mathfrak{q} \subset B$ è un ideale primo, $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subset A$ è un ideale primo. Perciò è ben definita una mappa

$$\underline{F} : \mathsf{Spec}\, B \ni \mathfrak{q} \longmapsto \underline{F}(\mathfrak{q}) := \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in \mathsf{Spec}\, A.$$

(1) $\underline{F}$ è una mappa continua. Per mostrarlo, consideriamo un ideale $\mathfrak{a} \subset A$ e il chiuso $V(\mathfrak{a}) \subset \mathsf{Spec}\, A$. Allora $\underline{F}^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V((\varphi(\mathfrak{a})))$ (in cui $(\varphi(\mathfrak{a}))$ è l'ideale generato da $\varphi(\mathfrak{a})$). Infatti, sia $\mathfrak{q} \in \mathsf{Spec}\, B$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{q} \in \underline{F}^{-1}(V(\mathfrak{a})) &\Longleftrightarrow \underline{F}(\mathfrak{q}) \in V(\mathfrak{a}) \\ &\Longleftrightarrow \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supset \mathfrak{a} \\ &\Longleftrightarrow \mathfrak{q} \supset \varphi(\mathfrak{a}) \\ &\Longleftrightarrow \mathfrak{q} \supset (\varphi(\mathfrak{a})). \end{aligned}$$

Ora notiamo che, per ogni $\mathfrak{q} \in \mathsf{Spec}\, B$, è ben definito un omomorfismo

$$\varphi_{\mathfrak{q}} : A_{\underline{F}(\mathfrak{q})} \longrightarrow B_{\mathfrak{q}}$$

(detto la localizzazione di φ a $\mathfrak{q}$) ponendo

$$\varphi_{\mathfrak{q}}\left(\frac{a}{f}\right) := \frac{\varphi(a)}{\varphi(f)}, \quad a, f \in A, \quad f \notin \underline{F}(\mathfrak{q}).$$

Infatti

$$\varphi(f) \in \mathfrak{q} \Longleftrightarrow f \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \underline{F}(\mathfrak{q}).$$

(2) $\varphi_{\mathfrak{q}}$ è un morfismo di anelli locali. Infatti, sia $a/f \in A_{\underline{F}(\mathfrak{q})}$, $a, b \in B$, $f \notin \underline{F}(\mathfrak{q})$. Allora

$$\begin{aligned} \frac{a}{f} \in \underline{F}(\mathfrak{q}) \cdot A_{\underline{F}(\mathfrak{q})} &\Longleftrightarrow a \in \underline{F}(\mathfrak{q}) \\ &\Longleftrightarrow \varphi(a) \in \mathfrak{q} \\ &\Longleftrightarrow \frac{\varphi(a)}{\varphi(f)} \in \mathfrak{q} \cdot B_{\mathfrak{q}}. \end{aligned}$$

Ora sia $U \subset \mathsf{Spec}\, A$ un aperto. Consideriamo l'aperto $\underline{F}^{-1}(U) \subset \mathsf{Spec}\, B$ e l'omomorfismo di anelli

$$F(U) : \mathcal{O}_A(U) \longrightarrow \mathcal{O}_B(\underline{F}^{-1}(U))$$

definito come segue. Per ogni sezione $s : U \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$ di $\mathcal{O}_A$ su U, poniamo

$$F(s)(\mathfrak{q}) := (\varphi_{\mathfrak{q}} \circ s \circ \underline{F})(\mathfrak{q}), \quad \mathfrak{q} \in \underline{F}^{-1}(U).$$

(3) $F(s)$ è una ben definita sezione di $\mathcal{O}_B$ su $\underline{F}^{-1}(U)$. Infatti, innanzitutto, giacché $s(\underline{F}(\mathfrak{q})) \in A_{\underline{F}(\mathfrak{q})}$, allora $F(s)(\mathfrak{q}) \in B_{\mathfrak{q}}$, per ogni $\mathfrak{q} \in \underline{F}^{-1}(U)$. inoltre sia $U' \subset U$ un sottoaperto in cui s è rappresentata dal rapporto a/f, $a, f \in A$, $f \notin \mathfrak{p}$ per alcun $\mathfrak{p} \in U'$. In particolare,

$$s(\underline{F}(\mathfrak{q})) = \frac{a}{f}$$

per ogni $\mathfrak{q} \in \underline{F}^{-1}(U')$. Quindi

$$F(s)(\mathfrak{q}) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(f)}$$

per ogni $\mathfrak{q} \in \underline{F}^{-1}(U')$.

È chiaro che $F(U)$ è un omomorfismo di anelli e che gli $F(U)$ sono compatibili con le restrizioni. In altre parole F è un ben definito morfismo di fasci su $\underline{F}$.

(4) F è un morfismo di spazi localmente anellati. Infatti, sia $\mathfrak{q} \in \mathsf{Spec}\,A$ e siano $\psi_A : \mathcal{O}_{A,\underline{F}(\mathfrak{q})} \longrightarrow A_{\underline{F}(\mathfrak{q})}$ e $\psi_B : \mathcal{O}_{B,\mathfrak{q}} \longrightarrow B_{\mathfrak{q}}$ gli isomorfismi canonici. Verifichiamo che il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{A,\underline{F}(\mathfrak{q})} \arrow[r, "F_{\mathfrak{q}}"] \arrow[d, "\psi_A"'] & \mathcal{O}_{B,\mathfrak{q}} \arrow[d, "\psi_B"] \\ A_{\underline{F}(\mathfrak{q})} \arrow[r, "\varphi_{\mathfrak{q}}"] & B_{\mathfrak{q}} \end{tikzcd}$$

commuta, calcolando

$$\begin{aligned} (\psi_B \circ F_{\mathfrak{q}})(s_{\underline{F}(\mathfrak{q})}) &= \psi_B(F(s)_{\mathfrak{q}}) \\ &= F(s)(\mathfrak{q}) \\ &= (\varphi_{\mathfrak{q}} \circ s \circ \underline{F})(\mathfrak{q}) \\ &= (\varphi_{\mathfrak{q}} \circ \psi_A)(s_{\underline{F}(\mathfrak{q})}) \end{aligned}$$

per un generico $s_{\underline{F}(\mathfrak{q})} \in \mathcal{O}_{A,\underline{F}(\mathfrak{q})}$ (qui s è una sezione locale di $\mathcal{O}_A$).

Finalmente, posto $\mathfrak{g}(\varphi) := F$, è facile verificare che $\mathfrak{g}$ ha le dovute proprietà funtoriali.

(5) Siano A, B anelli. L'applicazione

$$\mathfrak{g} : \mathsf{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathsf{Hom}((\mathsf{Spec}\,A, \mathcal{O}_A), (\mathsf{Spec}\,B, \mathcal{O}_B))$$

è biettiva. Infatti, si ponga $\mathfrak{g}(\varphi) =: F_\varphi$ per ogni $\varphi \in \mathsf{Hom}(A, B)$. Definiamo una mappa

$$\mathsf{Hom}((\mathsf{Spec}\,A, \mathcal{O}_A), (\mathsf{Spec}\,B, \mathcal{O}_B)) \ni F \longmapsto \varphi_F \in \mathsf{Hom}(A, B)$$

imponendo che il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_A(\mathsf{Spec}\,A) \arrow[r, "F"] & \mathcal{O}_B(\mathsf{Spec}\,B) \\ A \arrow[u, "\chi_A"] \arrow[r, "\varphi_F"] & B \arrow[u, "\chi_B"'] \end{tikzcd} , \tag{14}$$

in cui $\chi_A : A \longrightarrow \mathcal{O}_A(\mathsf{Spec}\,A)$ e $\chi_B : B \longrightarrow \mathcal{O}_B(\mathsf{Spec}\,B)$ sono gli isomorfismi canonici, commuti, e mostriamo che, per ogni $\varphi \in \mathsf{Hom}(A, B)$ e $F \in \mathsf{Hom}((\mathsf{Spec}\,A, \mathcal{O}_A), (\mathsf{Spec}\,B, \mathcal{O}_B))$,

$$\varphi_{F_\varphi} = \varphi \quad \text{e} \quad F_{\varphi_F} = F.$$

Sia dunque $\varphi \in \mathsf{Hom}(A, B)$. Mostriamo che il diagramma

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_A(\mathsf{Spec}\, A) \arrow[r, "F_\varphi"] & \mathcal{O}_B(\mathsf{Spec}\, B) \\
A \arrow[u, "\chi_A"] \arrow[r, "\varphi"] & B \arrow[u, "\chi_B"']
\end{tikzcd}
\tag{15}
$$

commuta. Se $a \in A$, $\chi_A(a)$ è la sezione globale $\mathcal{O}_A$ rappresentata ovunque da a. Perciò $(F_\varphi \circ \chi_A)(a)$ è la sezione globale di $\mathcal{O}_A$ rappresentata ovunque da $\varphi(a)$, cioè $(\chi_B \circ \varphi)(b)$.

Che $F_{\varphi_F} = F$ è mostrato dal lemma che segue.

□

Lemma 77. $F = F_{\varphi_F}$

Proof. Dimostriamo, innanzitutto, che $\underline{F}_{\varphi_F} = \underline{F}$. A questo scopo sia $\mathfrak{q} \in \mathsf{Spec}\, B$ e consideriamo il diagramma

$$
\begin{tikzcd}
 & & A_{\underline{F}(\mathfrak{q})} \arrow[r, "F'_\mathfrak{q}"] & B_\mathfrak{q} \\
A \arrow[r, "\varphi_F"] \arrow[d, "\chi_A"] \arrow[urr, "\nu_A"] & B \arrow[d, "\chi_B"] \arrow[urr, "\nu_B"] & \mathcal{O}_{A,\underline{F}(\mathfrak{q})} \arrow[r, "F_\mathfrak{q}"] \arrow[u, "\psi_A"] & \mathcal{O}_{B,\mathfrak{q}} \arrow[u, "\psi_B"] \\
\mathcal{O}_A(\mathsf{Spec}\, A) \arrow[r, "F"] \arrow[urr, "\mu_A"] & \mathcal{O}_B(\mathsf{Spec}\, B) \arrow[urr, "\mu_B"] & &
\end{tikzcd}
\quad , \tag{16}
$$

in cui le mappe χ, ψ, μ, ν sono i morfismi canonici e $F'_\mathfrak{q} := \psi_B \circ F_\mathfrak{q} \circ \psi_A^{-1}$ (si ricordi che le mappe χ, ψ sono isomorfismi). La faccia anteriore del diagramma (16) commuta per definizione di φ_F. La faccia posteriore commuta per definizione di $F'_\mathfrak{q}$. La faccia inferiore commuta per definizione di $F_\mathfrak{q}$. Anche le facce laterali commutano. Per esempio, sia $b \in B$. Allora

$$
\begin{aligned}
(\psi_B \circ \mu_B \circ \chi_B)(b) &= \psi_B(\chi_B(b)_\mathfrak{q}) \\
&= \chi_B(b)(\mathfrak{q}) \\
&= b/1 \quad (\text{in } B_\mathfrak{q}) \\
&= \nu_B(b).
\end{aligned}
$$

Similmente per la faccia sinistra. Come conseguenza, commuta anche la faccia superiore. Infatti

$$
\begin{aligned}
F'_\mathfrak{q} \circ \nu_A &= F'_\mathfrak{q} \circ \psi_A \circ \mu_A \circ \chi_A \\
&= \psi_B \circ F_\mathfrak{q} \circ \mu_A \circ \chi_A \\
&= \psi_B \circ \mu_B \circ F \circ \chi_A \\
&= \psi_B \circ \mu_B \circ \chi_B \circ \varphi_F \\
&= \nu_B \circ \varphi_F.
\end{aligned}
$$

Dalla identità
$$F'_{\mathfrak{q}} \circ \nu_A = \nu_B \circ \varphi_F$$
segue, per altro, che $F'_{\mathfrak{q}}$ coincide con la localizzazione $\varphi_{F,\mathfrak{q}}$ di φ_F. Infatti sia $a/f \in A_{\underline{F}(\mathfrak{q})}$, $a, f \in A$, $f \notin \underline{F}(\mathfrak{q})$. Si osservi che $f/1$ è invertibile in $A_{\underline{F}(\mathfrak{q})}$ e $1/f$ è il suo inverso. Di conseguenza $F'_{\mathfrak{q}}(f/1)$ è pure invertibile e il suo inverso è $F'_{\mathfrak{q}}(1/f)$. Similmente,
$$\varphi_{F,\mathfrak{q}}(f/1) = \varphi_F(f)/1 \in B_{\mathfrak{q}}$$
è invertibile e il suo inverso è $\varphi_{F,\mathfrak{q}}(1/f) = 1/\varphi_F(f)$. Allora
$$\begin{aligned}
F'_{\mathfrak{q}}\left(\frac{a}{f}\right) &= F'_{\mathfrak{q}}\left(\frac{a}{1}\right)F'_{\mathfrak{q}}\left(\frac{f}{1}\right)^{-1}\\
&= (F'_{\mathfrak{q}} \circ \nu_A)(a)(F'_{\mathfrak{q}} \circ \nu_A)(f)^{-1}\\
&= (\nu_B \circ \varphi_F)(a)(\nu_B \circ \varphi_F)(f)^{-1}\\
&= \frac{\varphi_F(a)}{1}\left(\frac{\varphi_F(f)}{1}\right)^{-1}\\
&= \frac{\varphi_F(a)}{\varphi_F(f)}\\
&= \varphi_{F,\mathfrak{q}}\left(\frac{a}{f}\right).
\end{aligned}$$
Ora osserviamo che $F_{\mathfrak{q}}$ (e anche $\varphi_{F,\mathfrak{q}}$) è un morfismo di anelli locali. Ne consegue che anche $F'_{\mathfrak{q}}$ è un morfismo di anelli locali. In particolare $F'^{-1}_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{q} \cdot B_{\mathfrak{q}}) = \underline{F}(\mathfrak{q}) \cdot A_{\underline{F}(\mathfrak{q})}$. Ora, sia $f \in A$. Si ha
$$\begin{aligned}
f \in \underline{F}(\mathfrak{q}) &\iff f/1 \in \underline{F}(\mathfrak{q}) \cdot A_{\underline{F}(\mathfrak{q})}\\
&\iff F'_{\mathfrak{q}}(f/1) \in \mathfrak{q} \cdot B_{\mathfrak{q}}\\
&\iff \varphi_F(f)/1 \in \mathfrak{q} \cdot B_{\mathfrak{q}}\\
&\iff \varphi_F(f) \in \mathfrak{q}\\
&\iff f \in \varphi_F^{-1}(\mathfrak{q})\\
&\iff f \in \underline{F}_{\varphi_F}(\mathfrak{q})
\end{aligned}$$
(in cui abbiamo usato che, come visto sopra, $F'_{\mathfrak{q}}(f/1) = \varphi_F(f)/1$). Questo mostra che $\underline{F} = \underline{F}_{\varphi_F}$.

Dimostriamo ora che $F(s) = F_{\varphi_F}(s)$ per ogni sezione locale s di $\mathcal{O}_A$. Sia $U \subset \operatorname{Spec} A$ l'aperto di definizione di s e $\mathfrak{q}$ un punto dell'aperto di definizione $\underline{F}^{-1}(U) \subset \operatorname{Spec} B$ di $F(s)$. Allora
$$\begin{aligned}
F(s)(\mathfrak{q}) &= \psi_B(F(s)_{\mathfrak{q}})\\
&= (\psi_B \circ F_{\mathfrak{q}})(s_{\underline{F}(\mathfrak{q})})\\
&= (F'_{\mathfrak{q}} \circ \psi_A)(s_{\underline{F}(\mathfrak{q})})\\
&= \varphi_{F,\mathfrak{q}}(s(\underline{F}_{\varphi_F}(\mathfrak{q})))\\
&= F_{\varphi_F}(s)(\mathfrak{q}).
\end{aligned}$$
□

Sia S un anello graduato, $f \in S_e$, $e > 0$, e
$$U_f^+ := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S : f \notin \mathfrak{p}\}.$$

U_f^+ è un aperto non vuoto in $\mathsf{Proj}\, S$. Se $\mathfrak{a} \subset S$ è un ideale omogeneo, poniamo

$$\varphi(\mathfrak{a}) := [\mathfrak{a} \cdot S_f] = \{a/f^k : a \in \mathfrak{a} \cap S_{ke}\} \subset [S_f]$$

tutti gli ideali di $[S_f]$ sono del tipo $\varphi(\mathfrak{a})$. Infatti sia $I \subset [S_f]$ un ideale e

$$\mathfrak{a}_I := (a \in S^h : \exists k \text{ tale che } a/f^k \in I) \subset S.$$

$\mathfrak{a}_I$ è, ovviamente, un ideale omogeneo. Inoltre,

$$\mathfrak{a}_I \cap S_{ke} = \{a \in S_{ke} : a/f^k \in I\}.$$

Ora

$$\varphi(\mathfrak{a}_I) = \{a/f^k : a \in \mathfrak{a}_I \cap S_{ke}\} = I$$

Proposition 78. *L'applicazione*

$$\varphi : U_f^+ \longrightarrow \mathsf{Spec}\,[S_f]$$

è un ben definito omeomorfismo.

Proof. (1) (φ è ben posta) Se $\mathfrak{p} \in U_f^+$ e $b/f^\ell \in S_f$, si ha $b/f^\ell \in \varphi(\mathfrak{p})$ sse $b \in \mathfrak{p} \cap S_{\ell e}$. Infatti

$$\begin{aligned} b/f^\ell \in \varphi(\mathfrak{p}) &\Longleftrightarrow b/f^\ell = a/f^k \text{ e } a \in \mathfrak{p} \cap S_{ke} \\ &\Longleftrightarrow b \in S_{\ell e} \text{ ed esiste } m : f^m(f^\ell a - f^k b) = 0 \\ &\Longleftrightarrow f^{m+k} b \in \mathfrak{p} \\ &\Longleftrightarrow b \in \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

Da questo si deduce facilmente che $\varphi(\mathfrak{p})$ è un ideale primo se $\mathfrak{p} \in U_f^+$ (verificarlo per esercizio).

(2) (φ è biettiva) Siano $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in U_f^+$ tali che $\varphi(\mathfrak{p}) = \varphi(\mathfrak{p}')$, $a \in \mathfrak{p} \cap S_d$ e $f \in S_e$, $e > 0$. Si ha $a^e/f^d \in \varphi(\mathfrak{p}) = \varphi(\mathfrak{p}')$, da cui $a^e \in \mathfrak{p}'$ e perciò $a \in \mathfrak{p}'$. Similmente $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$. Allora $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$. D'altronde sia $I \in \mathsf{Spec}\,[S_f]$. Poniamo

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_I.$$

Innanzitutto, $\mathfrak{p} \in \mathsf{Proj}\, S$. Infatti è un ideale omogeneo. Inoltre è un ideale primo perché se $a, a' \in S^h$ sono tali che $aa' \in \mathfrak{p}$. Allora $(aa')^e \in \mathfrak{p}$ e

$$I \ni \frac{(aa')^e}{f^{\deg a + \deg a'}} = \frac{a^e}{f^{\deg a}} \frac{a'^e}{f^{\deg a'}},$$

da cui $a^e/f^{\deg a} \in I$ (e dunque $a^e \in \mathfrak{p}$ e $a \in \mathfrak{p}$) o $a'^e/f^{\deg a'} \in I$ (e dunque $a'^e \in \mathfrak{p}$ e $a' \in \mathfrak{p}$). Ancora, $1 \notin \mathfrak{p}$ altrimenti si avrebbe $1 \in I$. In secondo luogo, $\mathfrak{p} \in U_f^+$. Infatti $f \notin \mathfrak{p}$, altrimenti si avrebbe $1 = f/f \in I$. Infine, come visto sopra $\varphi(\mathfrak{p}) = I$.

(3) (φ è continua e chiusa) Sia $\mathfrak{a} \subset S$ un ideale omogeneo. Se $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ allora, ovviamente, $\varphi(\mathfrak{p}) \supset \varphi(\mathfrak{a})$. D'altronde, supponiamo che $\varphi(\mathfrak{p}) \supset \varphi(\mathfrak{a})$, e $a \in \mathfrak{a} \cap S_d$. Allora,

$$\begin{aligned} a^e/f^d \in \varphi(\mathfrak{a}) &\Longrightarrow a^e/f^d \in \mathfrak{p} \\ &\Longrightarrow a^e \in \mathfrak{p} \\ &\Longrightarrow a \in \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

dunque $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ sse $\varphi(\mathfrak{p}) \supset \varphi(\mathfrak{a})$. In altre parole $\mathfrak{p} \in V_{\boldsymbol{P}}(\mathfrak{a})$ sse $\varphi(\mathfrak{p}) \in V(\varphi(\mathfrak{a}))$. Giacché tutti gli ideali di $[S_f]$ sono del tipo $\varphi(\mathfrak{a})$, questo mostra che $\varphi : U_f^+ \longrightarrow \mathsf{Spec}\,[S_f]$ è una mappa continua e chiusa. Essendo biettiva è addirittura un omeomorfismo.

□

Proposition 79. *Sia S un anello graduato, $\mathfrak{p} \subset S$ un ideale primo omogeneo e $f \in S_e \smallsetminus \mathfrak{p}$, $e > 0$. Vale la seguente versione della transitività della localizzazione:*

$$[S_f]_{\varphi(\mathfrak{p})} \simeq [S^{\mathsf{gr}}_{\mathfrak{p}}]$$

in cui il primo membro è la localizzazione a $\varphi(\mathfrak{p})$ di $[S_f]$.

Proof. (si noti che questa proposizione generalizza il Corollario 54) Consideriamo l'omomorfismo di anelli

$$H : [S_f]_{\varphi(\mathfrak{p})} \longrightarrow [S^{\mathsf{gr}}_{\mathfrak{p}}]$$

definito come segue. Sia $a \in S_{de}$, allora $a/f^d \in [S_f]$. Sia inoltre $b \in S_{ce} \smallsetminus \mathfrak{p}$, allora $b/f^c \in [S_f] \smallsetminus \varphi(\mathfrak{p})$. Poniamo

$$H\left(\frac{a/f^d}{b/f^c}\right) := \frac{af^c}{bf^d}. \tag{17}$$

Giacché $f \notin \mathfrak{p}$, il membro destro della (17) è ben definito. È facile verificare che H è un ben definito omomorfismo di anelli.

(1) (H è iniettivo) siano a, b come sopra e $af^c/bf^d = 0$. Ciò vuol dire che esiste $g \in S^h \smallsetminus \mathfrak{p}$ tale che

$$\begin{aligned} gf^c a = 0 &\Longrightarrow g^e f^c a = 0 \\ &\Longrightarrow g^e a/f^{\deg g + d} = 0 \quad (\text{in } [S_f]) \\ &\Longrightarrow \frac{g^e}{f^{\deg g}} \cdot \frac{a}{f^d} = 0 \quad (\text{in } [S_f]) \end{aligned}$$

Posto $\theta = g^e/f^{\deg g} \in [S_f] \smallsetminus \varphi(\mathfrak{p})$, abbiamo così mostrato che esiste un $\theta \in [S_f] \smallsetminus \varphi(\mathfrak{p})$ tale che

$$\theta \cdot \frac{a}{f^d} = 0 \quad (\text{in } [S_f]).$$

Ciò implica che

$$\frac{a/f^d}{b/f^c} = 0 \quad (\text{in } [S_f]_{\varphi(\mathfrak{p})}).$$

(2) (H è suriettivo) sia $g \in S_d \smallsetminus \mathfrak{p}$ e $a \in S_d$, sicché $a/g \in [S^{\mathsf{gr}}_{\mathfrak{p}}]$. Consideriamo

$$\frac{g^{e-1}a}{f^d} \in [S_f], \qquad \frac{g^e}{f^d} \in [S_f] \smallsetminus \mathfrak{p}$$

e

$$\frac{g^{e-1}a/f^d}{g^e/f^d} \in [S_f]_{\varphi(\mathfrak{p})}.$$

Calcoliamo

$$H\left(\frac{g^{e-1}a/f^d}{g^e/f^d}\right) = \frac{g^{e-1}af^d}{g^e f^d} = \frac{a}{g}.$$

□

E-mail address: `lvitagliano@unisa.it`

DipMat, Università degli Studi di Salerno, Via Ponte don Melillo, 84084 Fisciano (SA), Italy.