Geometria Superiore

A.A. 2014/2015
CdL in Matematica
Università degli Studi di Salerno

LUCA VITAGLIANO

March 2, 2015

Programma

Prerequisiti. Spazi affini. Anelli commutativi con unità. Ideali. Anelli quoziente. Domini di integrità. Campi. Moduli su un anello.

Preliminari. Anelli con unità e loro morfismi. Domini di integrità. Campi. Polinomi su un anello. Polinomi su un campo. Spazio affine numerico n-dimensionale $\boldsymbol{A}^n$. Funzioni polinomiali. Principio di identità dei polinomi (su un dominio infinito). Una riformulazione del principio di identità dei polinomi: anello delle funzioni su un insieme a valori in un campo. Un controesempio al principio di identità dei polinomi: il piccolo Teorema di Fermat. Luogo degli zeri simultanei di una famiglia di polinomi. Insiemi algebrici. Esempi: punti, sottospazi affini, quadriche, coniche, insiemi algebrici in $\boldsymbol{A}^1$, sottoinsiemi che non sono insiemi algebrici. Una leggera generalizzazione: spazi affini astratti, coordinate affini, funzioni polinomiali su uno spazio affine, insieme algebrici in uno spazio affine astratto. $\boldsymbol{A}^n$ e $\varnothing$ sono insieme algebrici. Intersezione di insieme algebrici. Unione di due insieme algebrici. Unione di un numero finito di insieme algebrici. Unione di un numero infinito di insieme algebrici. Complemento di un insieme algebrico. Topologia di Zariski di $\boldsymbol{A}^n$.

Elementi di Topologia. Aperti di $\mathbb{R}^n$. Le buone proprietà della famiglia degli aperti di $\mathbb{R}^n$. Una caratterizzazione delle funzioni continue $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Topologie su un insieme. Aperti, chiusi. Proprietà dei chiusi. Topologia definita dai chiusi. Esempi: topologia discreta, topologia concreta, topologia cofinita, topologia canonica di $\mathbb{R}$, la topologia canonica di $\mathbb{R}^n$, topologia canonica in $\mathbb{C}^n$. La topologia canonica di $\mathbb{C}^n$ è diversa dalla topologia di Zariski di $\boldsymbol{A}^n_{\mathbb{C}}$. Spazi topologici. Applicazioni continue. L'applicazione identica. Composta di applicazioni continue. Applicazioni continue e chiusi. Esempi: ogni applicazione su uno spazio discreto è continua, ogni applicazione a valori in uno spazio concreto è continua, una funzione polinomiale è continua rispetto alla topologia di Zariski. Sottospazi topologici. Esempio: ogni insieme algebrico è un (sotto)spazio topologico. l'inclusione di un sottospazio è un'applicazione continua. Aperti in sottospazi aperti. Chiusi in sottospazi chiusi. Chiusura di un sottospazio. Una semplice caratterizzazione della chiusura. Chiusura di un sottospazio chiuso. Esempi. Chiusura dell'unione. Sottospazi densi. Esempi. Ogni aperto di Zariski in $\mathbb{A}^n$ è denso (annuncio). Quozienti topologici. La proiezione su un quoziente è un'applicazione continua. Omeomorfismi. Esempi. Omeomorfismi e applicazioni aperte/chiuse. Un'applicazione continua biettiva la cui inversa non è biettiva. Spazi omeomorfi.

Insiemi Algebrici e Ideali. Applicazione Z dall'insieme della parti di A all'insieme delle parti di $\boldsymbol{A}^n$. $Z(T) = Z((T))$. Ogni insieme algebrico è il luogo degli zeri simultanei di un numero finito di polinomi. Applicazione I dall'insieme delle parti di $\boldsymbol{A}^n$ all'insieme delle parti di A. $I(X)$ è un'ideale. Proprietà elementari di Z e I: Z e I invertono le inclusioni e mandano unioni (infinite) in intersezioni (infinite). $Z \circ I$ è la chiusura. Richiami su ideali di un anello: ideali massimali, ideali primi, anelli quoziente su ideali massimali e primi. Ogni ideale massimale è primo. Ideali primi e intersezioni di ideali. Esempi di ideali primi: ideali principali e ideali primi in un dominio, ideali primi di $k[x]$, ideali primi che non sono massimali in $k[x, y]$. Sottoanelli di un quoziente. Ideali di un quoziente. Quozienti di anelli quoziente. Radicale di un ideale. Ideale radicale. Ogni ideale primo è radicale. Anelli quoziente su ideali radicali: anelli ridotti. Esempi: ideali radicali che non sono primi, ideali che non sono radicali. Nullstellensatz. Dualità algebra geometria. Biezione tra insieme algebrici e ideali radicali. Ideali massimali e chiusi minimali. Ideali massimali dell'anello dei polinomi.

Varietà Affini e Quasi-Affini. Ricoprimenti di sottospazi. Ricoprimenti aperti e chiusi. Ricoprimenti banali. Spazi irriducibili. Spazi riducibili. Esempio: la topologia concreta è irriducibile, la topologia discreta su un insieme di cardinalità > 1 è riducibile, la topologia canonica di $\mathbb{R}^n$ è riducibile. Sottospazi irriducibili di $\mathbb{R}^n$. Ogni aperto non vuoto in uno spazio irriducibile è denso (e irriducibile). Due aperti non vuoti in uno spazio irriducibile hanno intersezione non vuota. La chiusura di un sottospazio irriducibile è irriducibile. la chiusura di un punto è un sottospazio irriducibile. l'immagine continua di uno spazio irriducibile è irriducibile. insieme algebrici irriducibili e ideali primi. $\boldsymbol{A}^n$ è irriducibile. Ipersuperfici. Un commento sugli aperti di Zariski. Varietà affini. Spazi topologici Noetheriani. $\mathbb{R}^n$ con la topologia standard non è Noetheriano. $\boldsymbol{A}^n$ è Noetheriano. Decomposizione di chiusi in chiusi irriducibili in uno spazio topologico Noetheriano. Esempio: $Z((x^2y^2))$, suo ideale e sue componenti irriducibili. Varietà quasi affini.

Anello delle Coordinate Affini di un Insieme Algebrico. Anello delle coordinate affini. L'anello delle coordinate affini è ridotto. Anello delle coordinate affini di un punto. Anello delle coordinate affini di una varietà. Coordinate affini come funzioni sulla varietà. Topologia di Zariski di un insieme algebrico e zeri delle coordinate affini. Sottoinsiemi algebrici e sottovarietà. Algebre su un campo. Algebre commutative con unità. Esempio: l'algebra dei polinomi. Omomorfismi di algebre. Generatori di un algebra. Algebre finitamente generate. Algebra libera su un insieme. Teorema di estensione algebrica: esistenza e unicità dell'algebra libera. Ideali di un'algebra. Algebre quoziente. Ogni algebra (finitamente generata) è quoziente di un algebra libera (finitamente generata). Algebre ridotte e algebre integre: esempi, algebre delle coordinate affini di un insieme algebrico e di una varietà affine. Ogni algebra ridotta (risp. integra) e finitamente generata è l'anello delle coordinate affini di un insieme algebrico (risp. una varietà affine).

Spazio Proiettivo e Anelli Graduati. Sistemi omogenei. Spazio proiettivo numerico n-dimensionale. Coordinate omogenee. I polinomi omogenei non sono funzioni sullo spazio proiettivo. Luogo degli zeri di un polinomio omogeneo. Zeri di un insieme di polinomi omogenei. Topologia di Zariski di $\boldsymbol{P}^n$. La proiezione $\pi : \boldsymbol{A}^{n+1} \setminus \{O\} \longrightarrow \boldsymbol{P}^n$ è un'applicazione continua rispetto alle topologie di Zariski. Applicazione $Z_{\boldsymbol{P}}$ dall'insieme delle parti dei polinomi omogenei all'insieme delle parti di $\boldsymbol{P}^n$. Anelli graduati. Esempio: l'anello dei polinomi. Elementi omogenei. Componenti omogenee di un elemento. Ideali omogenei. Un ideale è omogeneo sse è generato da elementi omogenei, sse per ogni suo elemento le relative componenti omogenee sono nell'ideale. Somma, prodotto e intersezione di ideali omogenei. Radicale di un ideale omogeneo. Ideali primi omogenei. Quozienti su ideali omogenei. Algebre graduate. Omomorfismi di anelli graduati e di algebre graduate, isomorfismi. Topologia di Zariski di uno spazio proiettivo astratto.

Varietà Proiettive e Quasi-Proiettive. $Z_{\boldsymbol{P}}(T) = Z_{\boldsymbol{P}}((T))$. Ogni insieme algebrico proiettivo è il luogo degli zeri simultanei di un insieme finito di polinomi omogenei. Applicazione $I_{\boldsymbol{P}}$ dall'insieme delle parti di $\boldsymbol{P}^n$ all'insieme delle parti dei polinomi omogenei. $I_{\boldsymbol{P}}(X)$ è un ideale omogeneo. Proprietà elementari di $Z_{\boldsymbol{P}}$ e $I_{\boldsymbol{P}}$. Nullstellensatz omogeneo. Biezione tra insieme algebrici proiettivi e ideali radicali omogenei. Ideale irrilevante S_+ e ideali privi di zeri. Ogni ideale omogeneo proprio è contenuto nell'ideale irrilevante. Ideali massimali omogenei (non irrilevanti) e chiusi minimali. Ideali massimali omogenei (non irrilevanti) dell'anello dei polinomi. Insiemi algebrici irriducibili e ideali primi. $\boldsymbol{P}^n$ é irriducibile. Altri esempi. Punti, sottospazi proiettivi, coniche proiettive. Varietà proiettive. $\boldsymbol{P}^n$ é Noetheriano. Decomposizione di chiusi in chiusi irriducibili in $\boldsymbol{P}^n$. Varietá quasi-proiettive. Anello delle coordinate omogenee. Iperpiani. Iperpiani canonici. Ricoprimento affine di $\boldsymbol{P}^n$. Ricoprimento di una varietà (quasi) proiettiva mediante varietà (quasi) affini (gli omeomorfismi identificano i sottospazi irriducibili).

Estensioni Trascendenti. Estensioni di Campo. Sottocampo generato da un sottoinsieme. Grado di un estensione. Elementi algebrici ed elementi trascendenti. Estensioni algebriche.

Estensioni trascendenti. Esempi. Estensioni di campi algebricamente chiusi. Sistemi di elementi algebricamente indipendenti. relazioni (di dipendenza) algebrica. Sottoinsiemi algebricamente indipendenti. Indipendenza algebrica e lineare. Esempio: elementi linearmente indipendenti che non sono algebricamente indipendenti. Indipendenza algebrica e trascendenza. Esempio: elementi trascendenti algebricamente dipendenti. Caratterizzazioni dei sistemi algebricamente indipendenti. Basi di trascendenza. Estensioni con grado di trascendenza finito. Esistenza di basi di trascendenza ed equicardinalità delle basi di trascendenza: enunciato nel caso generale. Esistenza di basi di trascendenza ed equicardinalitá delle basi di trascendenza II: dimostrazione nel caso con grado di trascendenza finito, Lemma di Steinitz algebrico. Grado di trascendenza di un estensione. Esempio: $K \subset K(x_1, \ldots, x_d)$. Completamento di un sistema indipendente ad una base di trascendenza. Estensione algebrica di un estensione trascendente. Grado di trascendenza di un'estensione algebrica. Grado di trascendenza del campo delle funzioni razionali in n indeterminate. Grado di trascendenza del campo dei quozienti di un'algebra finitamente generata. Additività del grado di trascendenza. Estensioni puramente trascendenti. Una caratterizzazione delle estensioni puramente trascendenti con grado di trascendenza finito.

Dimensione degli Insiemi Algebrici. Motivazioni per la definizione di dimensione di un insieme algebrico. Dimensione di $\boldsymbol{A}^1$. Altezza di un ideale primo. Dimensione di Krull di un anello. Dimensione di un insieme algebrico e dimensione di Krull dell'anello delle coordinate affini. Dimensione dei punti. Dimensione di una k–algebra integra e finitamente generata (senza dimostrazione). La dimensione di $\boldsymbol{A}^n$ è n. Dimensione di un sottospazio. Dimensione delle varietà quasi affini: dimensione degli aperti di una varietà affine. La dimensione di un insieme algebrico affine è la massima dimensione di una sua componente irriducibile. La dimensione di una varietà affine $V \subset \mathbb{A}^{n-1}$ è $n-1$ sse $V = Z(f)$ per un polinomio irriducibile f (dimostrazione solo della condizione sufficiente). Dimensione di uno spazio ricoperto da aperti. Dimensione delle varietà proiettive (cenni). Dimensione di $\boldsymbol{P}^n$ e dimensione delle varietà quasi proiettive.

Morfismi. Motivazioni: pull-back, alcune caratterizzazioni delle applicazioni differenziabili $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Funzioni regolari su una varietà quasi-affine. Esistono sempre funzioni regolari. Le funzioni regolari sono continue (con la premessa che un sottospazio è chiuso se sono chiuse le intersezioni con gli aperti di un ricoprimento). Funzioni regolari su una varietà quasi-proiettiva. Esistono sempre funzioni regolari. Le funzioni regolari sono continue. Funzioni regolari definite localmente. Funzioni regolari uguali su un aperto. L'anello delle funzioni regolari. Il rapporto di funzioni regolari è una funzione regolare definita localmente. Varietà. Morfismi tra varietà. Morfismo identico. Composizione di morfismi. L'inclusione di una sottovarietà è un morfismo. Una mappa che prende valori in una sottovarietà è un morfismo sse lo è sulla sua immagine. Una mappa è un morfismo sse lo è localmente. Una mappa è un morfismo sse la sua composta con un isomorfismo è un morfismo. Morfismi e coordinate: una caratterizzazione dei morfismi a valori in una varietà quasi-affine, una funzione

$X \to k$ da una varietà è un morfismo sse è regolare. Isomorfismi. Esempio: Una funzione vettoriale a componenti regolari è un isomorfismo sul suo grafico, gli aperti del ricoprimento affine di $\boldsymbol{P}^n$ sono isomorfi ad $\boldsymbol{A}^n$. Esempi concreti. Controesempio: un morfismo biettivo e bicontinuo che non è un isomorfismo.

Localizzazioni. Sottoinsiemi moltiplicativi di un anello. Esempi: insieme delle unità, insieme degli elementi che non dividono zero, complemento di un ideale primo, insieme moltiplicativo generato da un elemento. Localizzazioni: proprietà universale. Costruzione della localizzazione. Localizzazioni su insiemi moltiplicativi che contengono lo 0. Nucleo della mappa canonica. Localizzazioni con mappa canonica iniettiva. Localizzazioni di domini di integrità. Esempio: la localizzazione ad un aperto dell'anello delle funzioni continue su $\mathbb{R}^n$. Localizzazioni su ideali primi. Localizzazioni e campo dei quozienti di un dominio. Transitività della localizzazione. Campo dei quozienti delle localizzazioni. Localizzazioni di un dominio su ideali massimali. Localizzazioni su elementi. Localizzazioni su elementi omogenei non nilpotenti. Esempi.

Anelli di Funzioni sulle Varietà. Anello delle funzioni regolari. L'uguaglianza locale di funzioni locali è una relazione di equivalenza. Germi di funzioni in un punto. Somma e prodotto di germi. Germe di 1. Anello locale di un punto. Anelli locali. Ideale massimale e campo residuo dell'anello locale di un punto. Campo delle funzioni razionali. Operazioni nel campo. Unità nel campo. Il campo delle funzioni è un campo. Mappe canoniche tra gli anelli di funzioni. Le mappe canoniche sono iniettive. Gli anelli canonici di varietà isomorfe sono isomorfi. Un lemma algebrico: elementi integrali di un estensione di anelli. Anelli di funzioni sulle varietà e anello delle coordinate: caso affine. Localizzazioni graduate. Anelli di funzioni sulle varietà e anello delle coordinate: caso proiettivo (cenni). Morfismi a valori in una varietà affine e morfismi di algebre. Due varietà affini sono isomorfe sse hanno anelli delle coordinate affini isomorfi.

Cenni su Categorie e Funtori. Classi. Categorie. La categoria degli insiemi. Esempi di categorie dall'algebra e dalla geometria. Esempi di categorie i cui morfismi non sono mappe. Diagrammi in una categoria. Isomorfismi. Funtori. Funtori covarianti e controvarianti. Ogni funtore manda isomorfismi in isomorfismi. Esempi di funtori dall'algebra e dalla geometria. Isomorfismi di categorie. Funtori fedeli e funtori pieni. Equivalenze di categorie (come funtori pienamente fedeli). Una equivalenza ammette un funtore quasi-inverso. Esempi. Prodotti e coprodotti in una categoria. Esempi: prodotti cartesiani di insiemi, prodotti cartesiani di spazi topologici, somma diretta di spazi vettoriali, coprodotto di insiemi, coprodotto di spazi topologici.

Prodotto di Varietà. Prodotto tensoriale di spazi vettoriali. Prodotto tensoriale di spazi finitamente generati. Prodotto tensoriale per un sottospazio. Prodotto tensoriale di quozienti. Prodotto tensoriale di algebre. Proprietà universale del prodotto di algebre (il prodotto di algebre è un coprodotto). Esempio: prodotto tensoriale di algebre di polinomi. Prodotto tensoriale di algebre integre e finitamente generate. Prodotto di varietà affini. Anello delle coordinate affini di un prodotto. Le proiezioni sui fattori di un prodotto sono morfismi. Proprietà universale del prodotto. Dimensione del prodotto. Immersione di Segré. Prodotto di varietà proiettive. Il prodotto è una varietà proiettiva. Le proiezioni sui fattori di un prodotto sono morfismi. Proprietà universale del prodotto (senza dimostrazione). Dimensione del prodotto (senza dimostrazione).

Mappe Razionali. Due morfismi che coincidono su un aperto coincidono. morfismi localmente definiti ed equivalenza. mappe razionali. mappe razionali dominanti. La categoria delle varietà con le mappe razionali dominanti. Equivalenze birazionali. Due varietà sono birazionali sse hanno due aperti isomorfi. Esempio: $\mathbb{P}^n$ e $\mathbb{A}^n$ sono birazionali. Pull-back di funzioni razionali mediante mappe razionali dominanti. La categoria delle varietà con le mappe razionali dominanti è equivalente alla categoria delle estensioni di campo con grado di trascendenza finito I: enunciato Il complemento di una ipersuperficie affine $f = 0$ è una varietà affine e il suo anello delle funzioni razionali è la localizzazione A_f. Ogni varietà è ricoperta da aperti affini. La categoria delle varietà con le mappe razionali dominanti è equivalente alla categoria delle estensioni di campo con grado di trascendenza finito II: schema della dimostrazione.

Fasci. Prefasci di gruppi abeliani. Prefasci come funtori controvarianti. Prefasci in una categoria. Prefasci di strutture algebriche. Sezioni. Sezioni locali. Sezioni globali. Restrizioni. Esempi: prefascio delle funzioni reali continue su uno spazio topologico, prefascio delle funzioni regolari su una varietà algebrica, prefascio costante. Fasci. Esempi: i prefasci di funzioni di cui sopra sono fasci, il prefascio costante non è, in genere, un fascio. Germi di sezioni e fibre. Germe di una sezione in un punto. Fibre del fascio delle funzioni regolari su una varietà. Morfismi di prefasci su uno spazio topologico. Morfismi di fasci su uno spazio topologico. Morfismo identico. Composta di morfismi. La categorie dei (pre)fasci su uno spazio topologico. Un morfismo è un isomorfismo sse è invertibile su ogni aperto. Morfismi indotti sulle fibre da un morfismo I. Una caratterizzazione degli isomorfismi di fasci. Il fascio associato ad un prefascio e la sua proprietà universale. Unicità del fascio associato ad un prefascio. Esempio: fascio costante. Fascio associato ad un fascio. Fibre del fascio associato ad un prefascio. Il funtore † dalla categoria dei prefasci alla categoria dei fasci su uno spazio topologico. Push-forward di un fascio mediante una mappa continua. Esempio: push forward del fascio delle funzioni reali continue su un sottospazio topologico. Push-forward mediante l'identità e push-forward mediante la composta di applicazioni continue. Push-forward di un morfismo. Morfismi di fasci su spazi topologici diversi. Restrizione di un fascio ad un aperto. Morfismo identico. Composta di morfismi. La categoria dei fasci. Morfismi indotti sulle fibre da un morfismo II.

Schemi. L'idea di Grothendieck. Un'occhiata alla equivalenza varietà affini ⇔ algebre integre e finitamente generate. Spettro massimale. Limiti dello spettro massimale. Spettro primo. Proprietà di V: $\varnothing$ e $\operatorname{Spec} A$ sono V di qualcosa, intersezione infinita di V, unione di due V, V inverte le inclusioni, $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b})$ sse $\sqrt{\mathfrak{b}} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$ (il radicale di un ideale $\mathfrak{a}$ è l'intersezione di tutti gli ideali primi che contengono $\mathfrak{a}$). Topologia di Zariski. Chiusura di un sottoinsieme dello spettro. Chiusura di un punto, esempi. Una base per la topologia di Zariski. $U_f \cap U_g = U_{fg}$ e quindi $U_a = U_{a^n}$. Prefascio di struttura dello spettro di un anello. Il prefascio di struttura è un fascio. Spazi anellati. Morfismi di spazi anellati. Spazi localmente anellati. Morfismi di spazi locamente anellati. Isomorfismi di spazi (localmente) anellati. La localizzazione di un anello A ad un ideale primo $\mathfrak{p}$ è un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{p} \cdot A_{\mathfrak{p}}$. Lo spettro di un anello è uno spazio localmente anellato. Sezioni del fascio di struttura su aperti basici. Sezioni globali del fascio di struttura. Spec è un funtore pienamente fedele dalla categoria degli anelli alla categoria degli spazi localmente anellati. Schemi affini. Schemi. Morfismi di schemi. Lo spettro omogeneo di un anello graduato e la sua topologia. Chiusura di un punto, esempi. Fascio di struttura di uno spettro omogeneo. Lo spettro omogeneo di un anello graduato è uno schema. Schemi su un campo. t-spazio di uno spazio topologico, esempi. La categoria delle varietà si "immerge" nella categoria degli schemi.

Libri di Testo Consigliati

- R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer.
- W. Fulton, Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Gemetry, Addison-Wesley. `http://www.math.lsa.umich.edu/~wfulton/CurveBook.pdf`
- K. E. Smith et al., An Invitation to Algebraic Geometry, Springer.